

CONCOURS BLANC PHYSIQUE

Lundi 11/05/26

Durée : 1h30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**⚠ Les parties I. et II. doivent être rédigées sur DEUX COPIES DIFFÉRENTES.
Bien noter vos NOM et CLASSE sur chaque copie !**

LES CHEVEUX DE PÉLÉ

Le présent sujet aborde plusieurs aspects physiques concernant les cheveux de Pélé. La première partie étudie les aspects thermodynamiques de la solidification de la lave. La deuxième partie traite d'un problème mécanique permettant de comprendre la dispersion des cheveux de Pélé sur l'île de la Réunion.

Les deux parties composant le sujet sont largement indépendantes, il est vivement conseillé de répartir un temps de travail équilibré sur chacune d'entre elles.

Introduction

Les cheveux de Pélé désignent les fibres de verre se formant lorsqu'une particule de lave en fusion projetée dans les airs s'étire à cause du vent et se solidifie en prenant l'allure d'un cheveu. Ils mesurent une fraction de millimètre en largeur et peuvent atteindre des longueurs de plusieurs centimètres.

La viscosité de la lave et la vitesse du vent sont des facteurs d'influence sur la géométrie finale. Les cheveux de Pélé peuvent ne pas s'étirer complètement en filaments : leur base, de la forme d'une goutte solidifiée, est appelée larme de Pélé.

En fonction de la vitesse du vent, les cheveux de Pélé peuvent être transportés à des kilomètres du lieu de leur formation jusqu'à des zones agricoles. Ils constituent alors une catastrophe naturelle car les cultures sont alors rendues impropres à la consommation et le bétail ne peut pâturer dans les prés contaminés, sous peine de risquer de se perforer le système digestif en les ingérant.

Document 1 – Illustrations de cheveux de Pélé

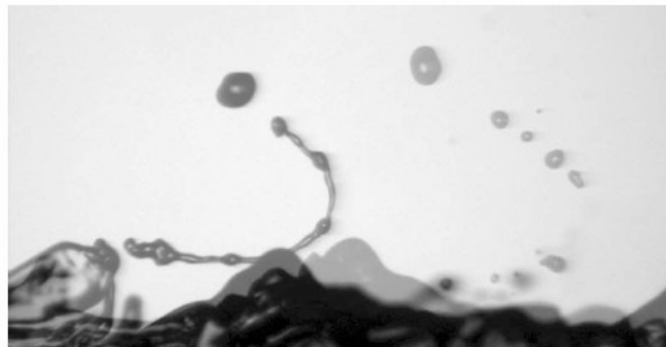
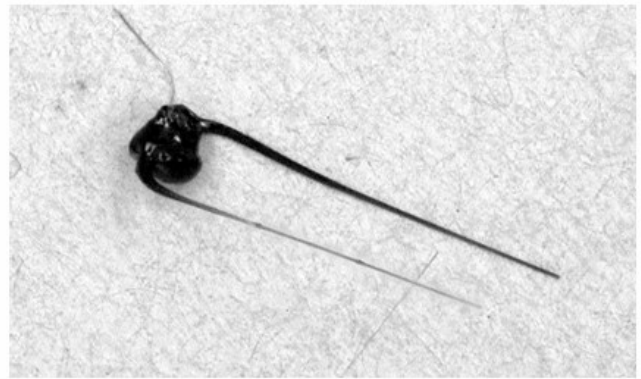
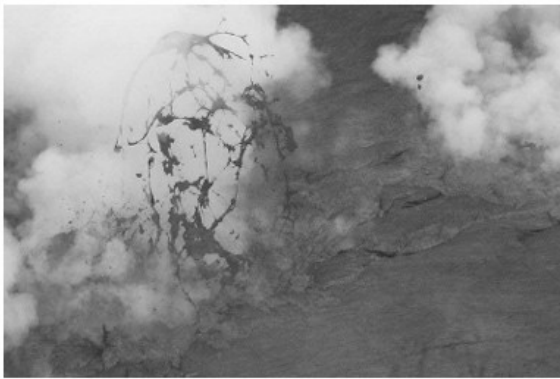


FIGURE 1 : Au dessus à gauche : les explosions de lave forment des filaments (Volcan Nyiragongo, Congo, Janvier 2011); à droite : des gouttes millimétriques, appelées larmes de Pélé, sont souvent retrouvées attachées à la base des cheveux. L'échantillon a une longueur de 9 mm. En dessous : photo prise en laboratoire d'un étirement de filament arraché par un courant d'air rapide imposé à la surface du fluide .

Après avoir étudié la formation puis la solidification des cheveux de Pélé, nous nous pencherons sur leur transport dû au vent.

Données numériques utiles

Pour la lave :

- température initiale : $T_i = 1450^\circ C$
- température de solidification : $T_s = 700^\circ C$
- masse volumique : $\rho = 2,3 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- enthalpie massique de fusion : $\ell_{fus} = 4,0 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$
- capacité thermique massique : $c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- diffusivité thermique : $D_{th} = 3 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

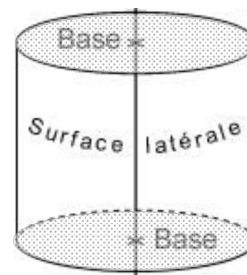
Pour l'air environnant :

- vitesse du vent : $u = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- température de l'air extérieur : $T_a = 40^\circ C$
- masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- coefficient conducto-convectif : $h = 100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Autres informations utiles

$$\sin(2x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$$

appellation des surfaces d'un cylindre :



I. Solidification des cheveux de Pélé

Dans cette partie, nous nous intéressons au processus de solidification dans le but de dégager un temps caractérisant ce processus. En raison de la présence de vent qui constitue un courant d'air froid par rapport à la lave sur le lieu de l'éruption, la lave en fusion va subir deux transformations thermodynamiques successives : elle va d'abord refroidir puis changer d'état. Nous supposons ici que, pendant ces deux transformations, la lave liquide a une géométrie cylindrique fixée et constante. La longueur du cylindre sera $L = 1 \text{ cm}$ et son rayon $R = 0,56 \text{ mm}$ définissant un volume total égal à $V_0 = 10 \text{ mm}^3$. La température T du cylindre est supposée uniforme.

I.A. Étape de refroidissement

- Q 1.** Le flux thermique entre l'air extérieur et la lave qui refroidit est de nature conducto-convective. Écrire l'expression du flux ϕ algébriquement reçu par le cylindre en fonction de sa température T , de sa surface totale S_{tot} , de la température extérieure T_a et du coefficient conducto-convectif h .
- Q 2.** En évaluant numériquement le rapport entre l'aire de la surface latérale S_{lat} et l'aire de la section droite du cylindre (ou aire de la base du cylindre) S , simplifier le résultat précédent.
- Q 3.** En réalisant un bilan thermique entre deux instants t et $t + dt$, montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution de la température $T(t)$ du cylindre (avant que celui-ci ne change d'état) s'écrit :

$$\frac{\rho Rc}{2h} \frac{dT}{dt}(t) + T(t) = T_a \quad (1)$$

- Q 4.** Donner l'expression du temps caractéristique τ de l'équation (1). Faire l'application numérique.
- Q 5.** Déterminer la solution de l'équation différentielle (1) à l'aide de la condition initiale.
- Q 6.** En déduire l'expression de la durée de refroidissement t_1 nécessaire pour passer de la température T_i jusqu'à la température T_s . L'exprimer en fonction de τ , T_i , T_a et T_s puis faire l'application numérique.

I.B. Étape de changement d'état

Le cylindre est désormais à la température T_s . L'échange de chaleur avec l'extérieur, toujours de nature conducto-convective, est maintenu et va conduire à sa solidification.

- Q 7.** Déterminer l'expression de la durée t_2 nécessaire pour solidifier le cylindre. Faire l'application numérique.
- Q 8.** En notant la somme $t_{tot} = t_1 + t_2$, tracer l'allure de la température T en fonction du temps t dans l'intervalle $[0; t_{tot}]$. Faire apparaître τ , T_i , T_a et T_s de manière explicite.

I.C. Résultats et discussion sur le modèle

- Q 9.** L'hypothèse consistant à supposer la température uniforme nécessite d'être vérifiée. On définit le temps caractéristique de diffusion τ_{diff} comme le temps au bout duquel la température du système est effectivement homogène, c'est donc le temps nécessaire pour que l'énergie thermique diffuse jusqu'à l'intérieur du système, donc sur une certaine distance à évaluer. En analysant l'unité du coefficient de diffusivité thermique D_{th} , déterminer l'expression de ce temps de diffusion τ_{diff} en fonction du coefficient de diffusivité thermique D_{th} et de la distance géométrique. Réaliser l'application numérique et conclure.
- Q 10.** Formuler des critiques du modèle utilisé dans cette partie

⚠ **Rédiger la partie II. Sur une COPIE DIFFÉRENTE.**
Bien noter vos NOM et CLASSE sur chaque copie !

II. Mécanique : transport des cheveux de Pélé

Un cheveu de Pélé au sommet de la montagne peut se déporter à grande distance en présence de vent. Pour évaluer l'impact sanitaire de ce phénomène, nous chercherons dans cette partie à estimer la portée d'un tir balistique sans, puis en présence de vent.

Le système choisi est un cylindre de lave indéformable, supposé déjà solidifié, de volume V_0 et de masse égale à $m = 2,3 \times 10^{-5} \text{ kg}$. Ses dimensions sont les mêmes que dans la partie précédente, c'est-à-dire une longueur $L = 1 \text{ cm}$ et un rayon $R = 0,56 \text{ mm}$.

II.A. Vent et frottements négligés

Dans cette première partie, nous voulons déterminer la portée d'une particule de lave solide dans le cas où le vent serait négligé. Nous nous plaçons dans le référentiel terrestre supposé galiléen et l'accélération de la pesanteur sera prise égale à $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La vitesse initiale du système, procurée par une explosion de lave, est notée \vec{v}_0 et fait un angle α avec le plan horizontal (voir figure 1). Nous prendrons $\|\vec{v}_0\| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ lors des applications numériques. L'origine du repère correspond au sommet du volcan d'où est projeté le système.

Le cylindre, assimilable à un point matériel, est repéré par ses coordonnées $(x(t); y(t))$.

Q 11. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, écrire et résoudre les équations différentielles pour les coordonnées $(x(t); y(t))$ du système.

Q 12. En déduire l'équation de la trajectoire.

Q 13. Déterminer littéralement la portée D du tir, **définie comme la distance horizontale parcourue par le cylindre depuis son point de départ jusqu'au point où il retrouve son altitude initiale.** Pour quelle valeur de α la portée devient-elle maximale ? Application numérique de la portée maximale. Cette distance présente-elle un risque sanitaire ?

Q 14. Déterminer littéralement le temps de vol τ_{vol} , **défini comme la durée mise par le cylindre pour parvenir au point de même altitude que celle de départ.** Faire l'application numérique pour l'angle α maximisant la portée puis commenter.

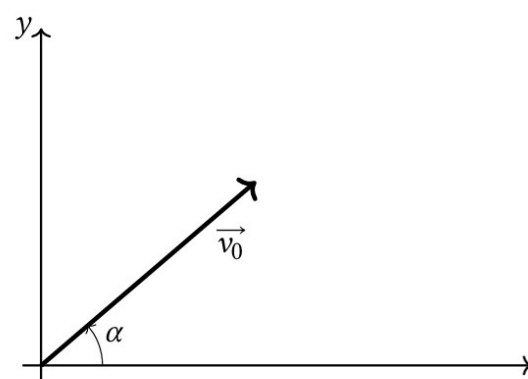


FIGURE 1 : Schéma de la situation initiale

II.B. En présence de vent

Le vent extérieur est maintenant pris en compte. Il est considéré uniforme en tout point et de norme u constante dans le temps. Le repère est choisi tel que l'écoulement d'air est selon l'axe des x . Le référentiel et les conditions initiales restent les mêmes.

Dans les conditions de cette étude, les forces de frottements sont proportionnelles au carré de la vitesse de l'écoulement.

À l'aide du principe fondamental de la dynamique, on peut établir les équations différentielles pour les coordonnées $(v_x(t); v_y(t))$ de la vitesse du système en introduisant la vitesse du vent extérieur $\vec{u} = u \vec{e}_x$:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt}(t) = -k \|\vec{v} - \vec{u}\| (v_x(t) - u) \\ \frac{dv_y}{dt}(t) = -g - k \|\vec{v} - \vec{u}\| v_y(t) \end{cases} \quad (2)$$

où $k = 1 \text{ m}^{-1}$

Le couplage entre les axes x et y d'une part et la non-linéarité des équations ci-dessus nécessitent une résolution numérique en utilisant la méthode d'Euler.

- Q 15.** Compléter les deux lignes 8 et 10 du code, après le signe "=" de chaque ligne. On recopiera la ligne en entier.
- Q 16.** Interpréter la condition d'arrêt de la boucle while (lignes 31 à 37). Commenter ce choix de modélisation.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 """Fonction qui calcule les grandeurs mecaniques selon la methode d'Euler"""
5 def euler_step(t,x,y,vx,vy,k,g,dt,u):
6     t_new = t+dt
7     x_new = x+vx*dt
8     y_new =
9     vx_new = vx-k*np.sqrt((vx-u)**2+vy**2)*(vx-u)*dt
10    vy_new =
11    return(t_new,x_new,y_new,vx_new,vy_new)
12
13 """Introduction des valeurs des parametres utiles au probleme"""
14 u,g,k,alpha,V0=20,10,1,0.25*np.pi,10
15
16 """Valeur du pas de temps dt"""
17 dt = 1e-2
18
19 """Introduction des valeurs initiales des grandeurs mecaniques"""
20 t,x,y,vx,vy = 0,0,0,V0*np.cos(alpha),V0*np.sin(alpha)
21
22 """Creation des vecteurs pour stocker les valeurs des grandeurs mecaniques"""
23 t_arr = [t]
24 x_arr = [x]
25 y_arr = [y]
26 vx_arr = [vx]
27 vy_arr = [vy]
28
29 """Remplissage des vecteurs"""
30 """la commande np.append(V,e) ajoute l'element e au bout de la liste V"""
31 while y >= 0 :
32     (t,x,y,vx,vy) = euler_step(t,x,y,vx,vy,k,g,dt,u)
33     t_arr = np.append(t_arr,t)
34     x_arr = np.append(x_arr,x)
35     y_arr = np.append(y_arr,y)
36     vx_arr = np.append(vx_arr,vx)
37     vy_arr = np.append(vy_arr,vy)
38
39 """Affichage de la trajectoire"""
40 plt.plot(x_arr,y_arr,"-")
41 plt.show()

```

Si on poursuit la résolution numérique au-delà de $y = 0$, on observe les résultats numériques du document 2. L'angle initial $\alpha = \pi/4$ et la norme de la vitesse initiale $\|\vec{v}_0\| = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ sont fixés et leurs effets ne seront pas discutés. Seule change la valeur de la vitesse du vent u .

Document 2 – Résultats des simulations numériques pour différentes valeurs de vitesse du vent u .

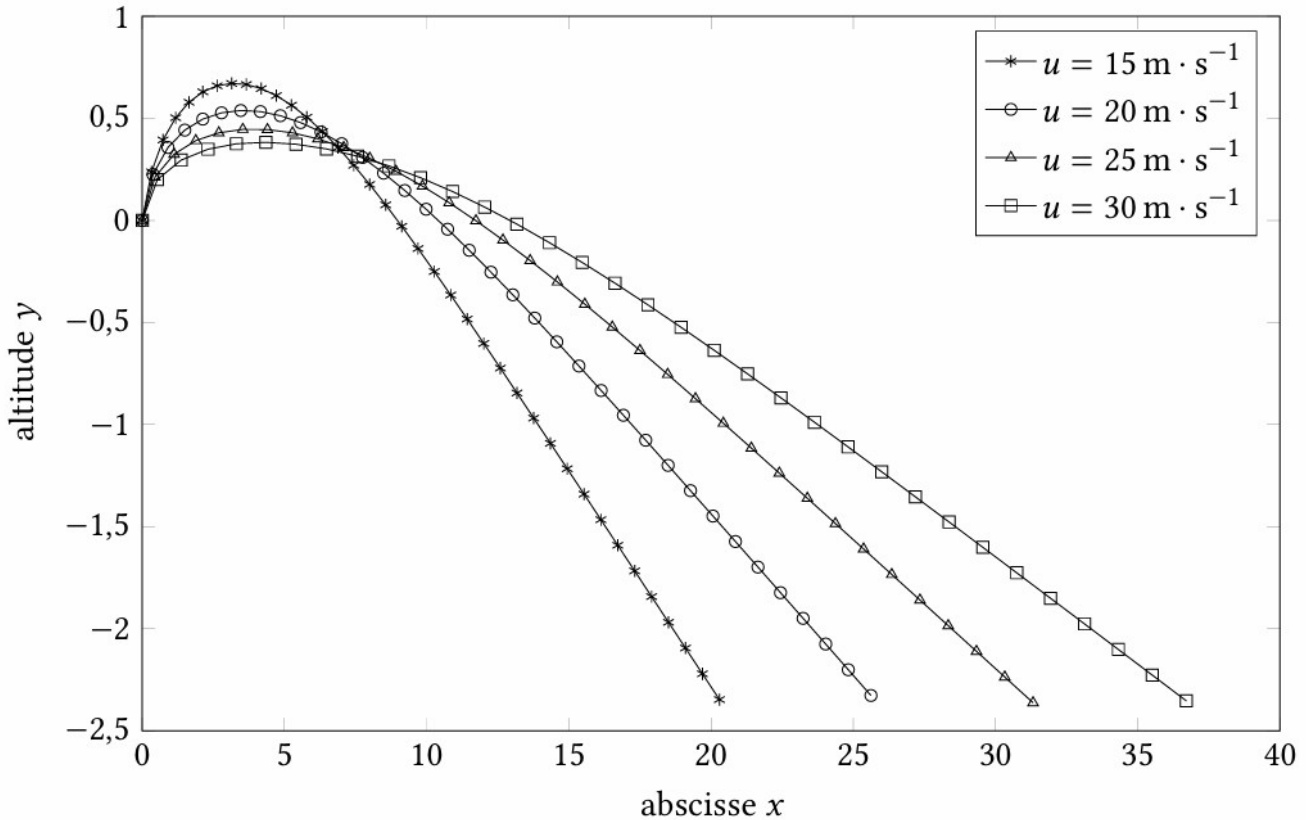


FIGURE 2 : Les distances sont données en mètre.

- Q 17.** Interpréter l'allure des trajectoires du document 2. Expliquer qualitativement pourquoi les cheveux peuvent être transportés à plusieurs kilomètres du volcan en présence de vent. Expliquer également pourquoi les cheveux peuvent se disperser sur de grandes surfaces.
- Q 18.** À l'aide des équations mécaniques (2), établir que pour t suffisamment grand, on obtient :

$$\begin{cases} v_{x,\infty} = u \\ v_{y,\infty} = -\sqrt{\frac{g}{k}} \end{cases} \quad (3)$$

Proposer un nom pour ce type de régime.

- Q 19.** Établir l'expression de la pente de ces trajectoires lorsque le temps devient suffisamment grand.
- Q 20.** À l'aide du document 3, évaluer la pente moyenne typique du flanc du Piton de la Fournaise et en déduire à quelle condition sur la vitesse du vent u un cheveu est transporté sur de grandes distances.

Document 3 – Étude de la pente moyenne le long d'une ligne de crête sur le flanc Est du Piton de la Fournaise.

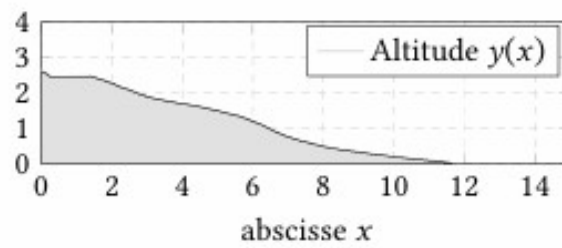


FIGURE 8 : Altitude du profil de la ligne de crête. L'origine du repère est placée au niveau de la mer, verticalement sous le pic du Piton de la Fournaise. Toutes les distances figurent en km.

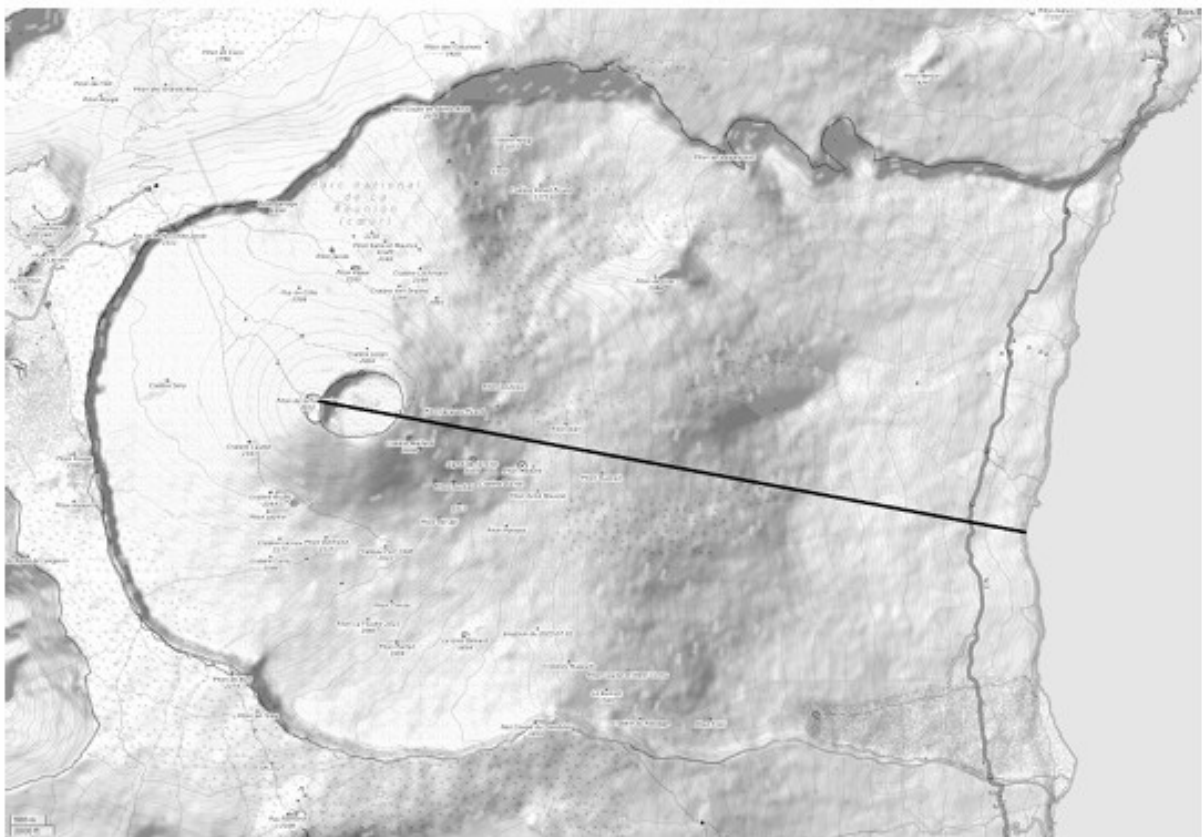


FIGURE 9 : Extrait d'une carte topographique du Piton de la Fournaise et de son littoral. La ligne de crête choisie est représentée en trait plein vue de dessus. Le point culminant sur la photographie est à 2 632 m.

FIN DU SUJET