CONCOURS BLANC – CORRIGÉ
Mathématiques - mardi 12 mai 2026
Durée : 3 h

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidate ou candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il convient d'alerter au plus tôt l'équipe de surveillance qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Si, au cours de l'épreuve, une candidate ou un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle ou il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives prises.

Ce sujet comporte 3 exercices indépendants.

On pourra admettre le résultat d'une question ou d'une sous-question pour passer aux questions suivantes, à condition de le mentionner explicitement.

Une annexe dans laquelle certaines commandes Python sont rappelées est jointe à la fin du sujet. **Pour les questions d'informatique, on considérera que les importations de modules nécessaires ont été préalablement faites.**

Exercice 1. un montage électrique
On propose de modéliser un câble coaxial par un circuit électrique constitué d'une chaîne de n modules identiques comportant chacun trois conducteurs ohmiques en dérivation avec un quatrième conducteur ohmique. Tous les conducteurs ohmiques sont de résistance $r > 0$. *Dans tout l'exercice, on fixe donc* $r > 0$.
Pour simuler un câble de grande longueur on souhaite déterminer la valeur de la résistance équivalente de la chaîne lorsque n tend vers $+\infty$.

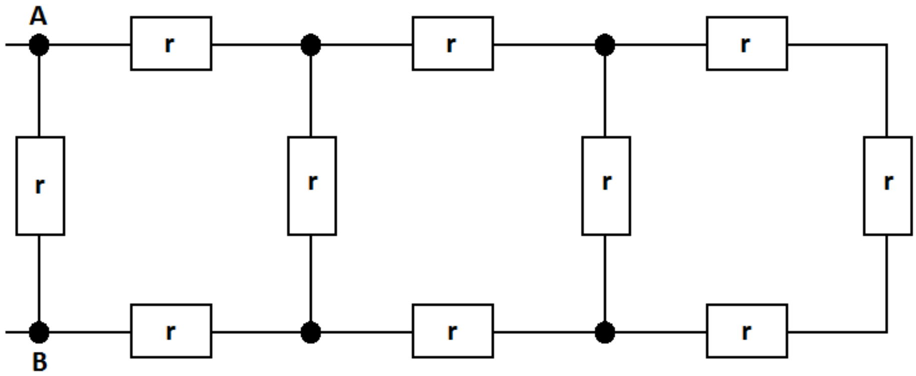


Schéma du circuit lorsque $n = 3$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note R_n la résistance équivalente de la chaîne à n modules ; et on pose par convention $R_0 = r$. Pour $n = 1$, la chaîne est par exemple équivalente à un circuit avec un seul conducteur ohmique de résistance R_1 (figure de gauche ci-dessous).

De manière générale, le lien entre R_n et R_{n+1} s'obtient en disant que les deux circuits présentés sur la figure de droite sont équivalents :

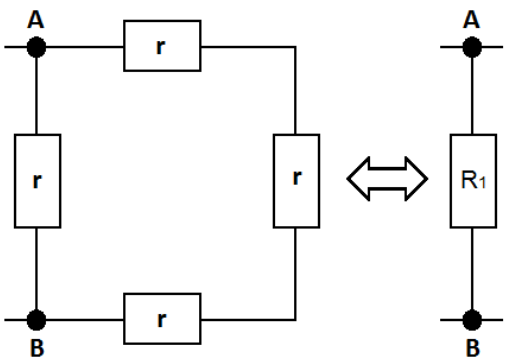
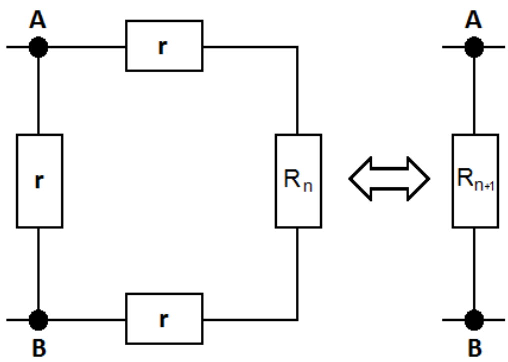


Schéma du circuit lorsque $n = 1$



Passage de R_n à R_{n+1}

On admet que les règles de calculs des résistances équivalentes en électricité donnent : $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{3r}$, et, de manière générale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r + R_n}$$

1. (a) D'après l'énoncé,

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{r}+\frac{1}{3r}=\frac{4}{3r}$$

donc $\boxed{R_1=\frac{3}{4}r.}$

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{R_{n+1}}=\frac{1}{r}+\frac{1}{2r+R_n}=\frac{2r+R_n+r}{r(2r+R_n)}=\frac{3r+R_n}{r(2r+R_n)}.$$

Ainsi

$$R_{n+1}=r\,\frac{2r+R_n}{3r+R_n}.$$

En définissant la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x)=r\,\frac{2r+x}{3r+x},$$

on obtient bien :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad R_{n+1}=f(R_n).$$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ R_{n+1}=f(R_n)\text{ avec } f(x)=r\frac{2r+x}{3r+x}.}$

(b) la suite (R_n) est correctement définie ssi $\forall n\in\mathbb{N}$, $3r+R_n\neq 0$.
Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $R_n>0$ donc la suite sera bien définie.
$n=0$: $R_0=r>0$, donc récurrence initialisée .
$n\geqslant 0$: Supposons que $R_n>0$ à un certain rang n.
$R_{n+1}=f(R_n)$, avec $R_n>0$ d'après HR. Or pour tout $x>0$, $2r+x>0$ et $3r+x>0$ (car $r>0$) donc $f(x)>0$.
Conclusion : $R_{n+1}>0$ et la récurrence est achevée.
Ainsi $\boxed{\text{la suite } (R_n) \text{ est correctement définie.}}$

(c) i.

```
def Termes(n,r) :
        R=r
        for k in range(1,n+1):
                R=r*(2*r+R)/(3*r+R)
        return R
```

ii.

```
def Liste_Termes(N,r) :
        return [Termes(k,r) for k in range(N+1)]
```

iii.

```
def Liste_mieux(N,r) :
        R=r ; L=[R]
        for k in range(1,N+1):
                R=r*(2*r+R)/(3*r+R)
                L.append(R)
        return L
```

iv.

```
import matplotlib.pyplot as plt

r = 1
N = 20
```

```
R = r
L = [R]

for k in range(N):
    R = r * (2 * r + R) / (3 * r + R)
    L.append(R)

absi = [k for k in range(N+1)]

plt.plot(absi,L)
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("R_n")
plt.show()
```

2. Dans cette question, on étudie la convergence de la suite (R_n).
   (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:
   $$f'(x) = r\,\frac{(3r+x)-(2r+x)}{(3r+x)^2} = \frac{r^2}{(3r+x)^2}.$$
   Comme $r > 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:
   $$f'(x) > 0.$$
   Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+.}$
   (b) Tout d'abord, comme vu à la question 1.(b), la suite (R_n) est minorée par 0.
   Montrons ensuite que (R_n) est décroissante en montrant par récurrence que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ R_{n+1} \leq R_n$.

   Pour $n = 0$, on a $R_1 = \frac{3}{4}r \leq r = R_0$ donc la propriété est vraie.
   Supposons ensuite que $R_{n+1} \leq R_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Comme R_n et R_{n+1} appartiennent à $\mathbb{R}^+$ et que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ cela implique que $f(R_{n+1}) \leq f(R_n)$ c'est-à-dire $R_{n+2} \leq R_{n+1}$ ce qu'il fallait démontrer.

   Ainsi (R_n) est décroissante et minorée donc $\boxed{(R_n) \text{ converge.}}$
   (c) Notons l la limite de (R_n).
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n > 0$ donc :
   $$l \geqslant 0.$$
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc en passant à la limite dans
   $$R_{n+1} = f(R_n),$$
   on obtient $(3r + l \neq 0)$:
   $$l = f(l) \iff l = r\frac{2r+l}{3r+l} \iff l(3r+l) = 2r^2 + rl \iff l^2 + 2rl - 2r^2 = 0\,.$$
   Le discriminant vaut
   $$\Delta = 4r^2 + 8r^2 = 12r^2 > 0$$
   Les solutions sont donc
   $$l = \frac{-2r \pm 2r\sqrt{3}}{2} = -r \pm r\sqrt{3}.$$

Comme $l \geqslant 0$, on obtient nécessairement

$$l = (\sqrt{3} - 1)r.$$

Ainsi $\boxed{\lim_{n \to +\infty} R_n = (\sqrt{3} - 1)r.}$

Physiquement, cela signifie que lorsque la longueur du câble tend vers $+\infty$, la résistance équivalente du circuit se rapproche d'une valeur limite finie égale à $(\sqrt{3} - 1)r$.

3. Dans cette question, on note $R^* = (\sqrt{3}-1)r$ la limite de la suite (R_n) et on s'intéresse à quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$ choisir pour que R_n soit suffisamment proche de R^*.

   (a) Puisque $f(R^*) = R^*$, calculons la différence $f(x) - f(R^*)$:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(R^*) &= r\left(\frac{2r + x}{3r + x} - \frac{2r + R^*}{3r + R^*}\right) \\
&= r\frac{(2r + x)(3r + R^*) - (2r + R^*)(3r + x)}{(3r + x)(3r + R^*)} \\
&= r\frac{(6r^2 + 2rR^* + 3rx + xR^*) - (6r^2 + 2rx + 3rR^* + xR^*)}{(3r + x)(3r + R^*)} \\
&= r\frac{rx - rR^*}{(3r + x)(3r + R^*)} \\
&= \frac{r^2}{(3r + x)(3r + R^*)}(x - R^*)
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } x > 0,\ f(x) - R^* = \frac{r^2}{(3r + x)\,(3r + R^*)}\,(x - R^*)}$

   (b) Puisque $2 + \sqrt{3} \geqslant 2 + 1 = 3$, on obtient : $\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} \leqslant \dfrac{1}{3}$, donc :

   $\boxed{\dfrac{1}{3\,(2 + \sqrt{3})} \leqslant \dfrac{1}{9}}$

   (c) Soit $K(x) = \dfrac{r^2}{(3r + x)(3r + R^*)}$. Comme $x > 0$, on a $3r + x > 3r$, d'où $\dfrac{1}{3r + x} < \dfrac{1}{3r}$.
   De plus, $3r + R^* = 3r + (\sqrt{3} - 1)r = (2 + \sqrt{3})r$. On obtient la majoration suivante :

$$|K(x)| \leq \frac{r^2}{3r \times (2 + \sqrt{3})r} = \frac{1}{3(2 + \sqrt{3})} \leqslant \frac{1}{9}$$

   Conclusion : $\boxed{\forall x > 0,\ |f(x) - R^*| \leq \frac{1}{9}|x - R^*|}$

   (d) Par récurrence sur : $n \in \mathbb{N},\ |R_n - R^*| \leq \dfrac{(2 - \sqrt{3})r}{9^n}$.

   - Pour $n = 0$:

$$|R_0 - R^*| = |r - (\sqrt{3} - 1)r| = (2 - \sqrt{3})r.$$

     La propriété est donc vraie au rang 0.
   - Supposons la propriété vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
     Alors :

$$|R_{n+1} - R^*| = |f(R_n) - R^*| \leq \frac{1}{9}|R_n - R^*|$$

     d'après la question précédente.
     Puis, par hypothèse de récurrence :

$$|R_{n+1} - R^*| \leq \frac{1}{9} \times \frac{(2 - \sqrt{3})r}{9^n} = \frac{(2 - \sqrt{3})r}{9^{n+1}}.$$

Ceci achève la récurrence.

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n - R^*| \leq \frac{(2-\sqrt{3})r}{9^n}}$$

(e)

```
import math as m
def Premier(r,eps):
        n=0 ; etoile=(m.sqrt(3)-1)*r ; R=r
        while m.abs(R-etoile)> eps :
                R=r*(2*r+R)/(3*r+R)
                n=n+1
        return n
```

Exercice 2. Autofécondation d'un individu diploïde
On s'intéresse à l'évolution du génotype d'un individu diploïde se reproduisant par autofécondation. On se limite à l'étude d'un seul gène présentant deux allèles différents a et A. L'individu possède deux versions du gène, il peut donc être hétérozygote aA, homozygote aa ou homozygote AA.

On suppose qu'il se reproduit à chaque génération par autofécondation. Le génotype du descendant dépend alors uniquement du génotype de l'ancêtre et de l'aléa, lié aux mécanismes de la reproduction sexuée (méiose avec séparation des chromosomes homologues et fécondation avec rencontre aléatoire des gamètes).

1. (a)

	aa	aA	AA
aa	1	$\frac{1}{4}$	0
aA	0	$\frac{1}{2}$	0
AA	0	$\frac{1}{4}$	1

En effet :

- un individu aa ne produit que des gamètes a, donc tous ses descendants sont de génotype aa ;
- un individu AA ne produit que des gamètes A, donc tous ses descendants sont de génotype AA ;
- un individu aA produit des gamètes a et A avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacune. La probabilité qu'il produise deux gamètes identiques est donc $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Et ainsi la probabilité qu'il produise deux gamètes différentes vaut $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

(b)

```
import numpy as np
def Tableau():
        return np.array([[1, 1/4,0], [0,1/2,0], [0, 1/4,1] ])
```

Dans la suite de l'exercice, on note aa_n (respectivement aA_n et AA_n) l'événement "l'individu de la n-ème génération est de génotype aa" (respectivement aA et AA). On note p_n, q_n et r_n les probabilités suivantes : $p_n = \mathbb{P}(aa_n)$, $q_n = \mathbb{P}(aA_n)$, $r_n = \mathbb{P}(AA_n)$, et on note $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

2. (a) D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'évènements (aa_n, aA_n, AA_n) :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbb{P}(aa_{n+1}) &= \mathbb{P}_{aa_n}(aa_{n+1})\mathbb{P}(aa_n) + \mathbb{P}_{aA_n}(aa_{n+1})\mathbb{P}(aA_n) + \mathbb{P}_{AA_n}(aa_{n+1})\mathbb{P}(AA_n) \\ &= p_n + \frac{1}{4}q_n. \end{aligned}$$

De même :

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n$$

et

$$r_{n+1} = r_n + \frac{1}{4}q_n.$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Conclusion :

$$\boxed{X_{n+1} = MX_n}$$

avec

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Une récurrence immédiate montre alors que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0.}$$

(c)

```
import numpy as np
def puissances(n):
        P=np.eye(3)
        for k in range (1,n+1):
                P=np.dot(P,Tableau())
        return P
```

3. (a) Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ M^n = \begin{pmatrix} 1 & x_n & 0 \\ 0 & y_n & 0 \\ 0 & x_n & 1 \end{pmatrix}.$$

- Pour $n = 1$, cela correspond exactement à la définition de M avec

$$x_1 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{1}{2}.$$

- Supposons la propriété vraie à un certain rang $n \geqslant 1$.
  Alors :

$$M^{n+1} = M^n M$$

  donc

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & x_n & 0 \\ 0 & y_n & 0 \\ 0 & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{2x_n+1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{y_n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2x_n+1}{4} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  On obtient bien la forme voulue avec :

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{4}$$

  et

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{2}.$$

Ceci achève la récurrence.

(b) i.

```
def suite_x(n) :
        x=1/4
        for k in range(1,n+1) :
                x=(2*x+1)/2
        return x

def suite_y(n) :
        y=1/2
        for k in range(1,n+1) :
                y=y/2
        return y
```

ii.

```
import numpy as np
def puissances_bis(n) :
        return np.array([[1,suite_x(n),0],[0,suite_y(n),0],[0,suite_x(n),1]])
```

iii.

```
import numpy as np

def puissances_mieux(n) :
        x=1/4 ; y=1/2
        L1=[1,x,0] ; L2=[0,y,0] ; L3=[0,x,1]
        for k in range(2,n+1) :
                x=(2*x+1)/2 ; y=y/2
                L1[1]=x ; L2[1]=y ; L3[1]=x
        return np.array([[1,x,0],[0,y),0],[0,x,1]])
```

(c) La suite (y_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $y_1 = \frac{1}{2}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1 = \frac{1}{2^n}.$$

Cherchons maintenant x_n. Résolvons :

$$x = \frac{2x+1}{4} \iff x = \frac{1}{2}$$

Alors la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et :

$$u_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = -\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}.}$$

Finalement :$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 1 \end{pmatrix}}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = M^n X_0$$

donc :

$$\boxed{q_n = \frac{q_0}{2^n}.}$$

De plus :

$$p_n = p_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) q_0$$

et

$$r_n = r_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) q_0.$$

Ainsi :

$$\boxed{p_n = p_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) q_0}$$

et

$$\boxed{r_n = r_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) q_0.}$$

4. (a) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = \dfrac{q_0}{2^n}$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q_n = 0.}$$

Puis :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = p_0 + \frac{q_0}{2}} \text{ et } \boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = r_0 + \frac{q_0}{2}.}$$

Interprétation : à long terme, la probabilité qu'un descendant soit hétérozygote tend vers 0. Les descendants finissent donc par être homozygotes.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse aux évènements H_n : "le descendant de la n-ème génération est homozygote" et T_n : "c'est à partir de la n-ème génération que les tous les descendants sont homozygotes".

L'évènement H_n est le contraire de l'évènement "le descendant de la n-ième génération est hétérozygote".

Ainsi :

$$H_n = \overline{aA_n}.$$

Donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(H_n) = 1 - q_n.}$$

Par ailleurs, l'évènement T_n est réalisé lorsque l'individu de la génération $n-1$ est hétérozygote et que l'individu de la génération n est homozygote (car lorsqu'un individu est homozygote, tous ses descendants le restent).

Ainsi :

$$T_n = H_n \backslash H_{n-1}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}(H_n) - \mathbb{P}(H_{n-1}) = 1 - q_n - (1 - q_{n-1}) = q_{n-1} - q_n.$$

En utilisant l'expression de q_n trouvée à la question précédente il vient donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n) = \frac{q_0}{2^{n-1}} - \frac{q_0}{2^n} = \frac{q_0}{2^n}.}$$

(c) On s'intéresse à la quantité $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(T_k)$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = S_n = q_0 \times \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right)$.

La formule est vraie au rang $n = 0$ car les deux termes donnés sont alors nuls.
Supposons la formule vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + (n+1)\mathbb{P}(T_{n+1}) &= q_0 \times \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) + (n+1)\frac{q_0}{2^{n+1}} \\ &= q_0 \times \left(2 - \frac{2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) \\ &= q_0 \times \left(2 - \frac{2n+4-(n+1)}{2^{n+1}}\right) \\ &= q_0 \times \left(2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cette limite représente le nombre moyen de générations avant disparition du caractère hétérozygote. Lorsque $q_0 = 1$ (c'est-à-dire pour un individu de départ hétérozygote), il faut donc attendre en moyenne 2 générations pour obtenir une lignée homozygote.

Exercice 3. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et on considère les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1,-1,1,2)\ ;\ u_2 = (0,1,2,1)\ ;\ u_3 = (2,-1,4,5)$$

On définit , pour tout réel a :

$$F_a = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ :\ x + ay - z = 0 \text{ et } 2x + y + (a-1)t = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3).$$

1. (a) $*$ $0 + a \times 0 - 0 = 0$ et $2 \times 0 + 0 + (a-1) \times 0 = 0$ donc $(0,0,0,0) \in F_a$
   $*$ Pour tout vecteur $u, v \in F_a$, pour tout réel λ, μ, montrons que $\lambda u + \mu v \in F_a$.
   On note $u = (x,y,z,t)$ donc $x + ay - z = 0$ et $2x + y + (a-1)t = 0$, et $v = (e,b,c,d)$ donc $e + ab - c = 0$ et $2e + b + (a-1)d = 0$.
   Donc $\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu e, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c, \lambda t + \mu d)$, avec :
   $*$ $(\lambda x + \mu e) + a\,(\lambda y + \mu b) - (\lambda z + \mu c) = \lambda\,(x + ay - z) + \mu\,(e + ab - c) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$
   $*$ $2\,(\lambda x + \mu e) + (\lambda y + \mu b) + (a-1)\,(\lambda t + \mu d) = \lambda\,(2x + y + (a-1)t) + \mu\,(2e + b + (a-1)d) = 0$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } a,\ F_a \text{ est un sev de } \mathbb{R}^4}$

   (b)
   $$\begin{aligned} F_a &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -\frac{1}{2}\,y - \frac{a-1}{2}\,t \text{ et } z = \left(a - \frac{1}{2}\right)\,y - \frac{a-1}{2}\,t\right\} \\ &= \left\{\left(-\frac{1}{2}\,y - \frac{a-1}{2}\,t, y, \left(a - \frac{1}{2}\right)\,y - \frac{a-1}{2}\,t, t\right) \mid y,t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{y\left(-\frac{1}{2}, 1, a - \frac{1}{2}, 0\right) + t\left(-\frac{a-1}{2}, 0, -\frac{a-1}{2}, 1\right) \mid y,t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{2y\,(-1,2,2a-1,0) + 2t\,(1-a,0,1-a,2) \mid y,t \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\,((-1,2,2a-1,0),(1-a,0,1-a,2)) \end{aligned}$$

   La famille est donc génératrice de F_a. Elle est aussi libre.
   Conclusion : pour tout $a \in \mathbb{R}$
   $\boxed{\text{Une base de } F_a \text{ est } ((-1,2,2a-1,0),(1-a,0,1-a,2)) \text{ et } \dim(F_a) = 2}$

2. (a) On remarque que $2u_1 + u_2 = (2,-2,2,4) + (0,1,2,1) = (2,-1,4,5) = u_3$.
   $\boxed{\text{La famille est donc } \textbf{liée}}$

   (b) D'après la question précédente, $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Or u_1, u_2 ne sont pas colinéaires, donc :
   $\boxed{\text{une base de } G \text{ est } (u_1,u_2) \text{ et } \dim(G) = 2}$

   (c) Tout $(x,y,z,t) \in G$ ssi : il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que : $\lambda u_1 + \mu\, u_2 = (x,y,z,t)$

   $$\iff \left\{\begin{array}{ccccl} \lambda & & & = x \\ -\lambda & + & \mu & = y \\ \lambda & + & 2\mu & = z \\ 2\lambda & + & \mu & = t \end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{clll} \lambda & & = x & \\ & \mu & = x + y & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ & 2\mu & = z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ & \mu & = t - 2x & L_4 \leftarrow L_4 - 2\,L_1 \end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{clll} \lambda & & = x & \\ & \mu & = x + y & \\ & 0 & = z - 3x - 2y & L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_2 \\ & 0 & = t - 3x - y & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}\right.$$

   Conclusion : $\boxed{G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 2y - z = 0 \text{ et } 3x + y - t = 0\right\}}$

3. (a) $u_1 \in F_a$ ssi ses coordonnées vérifient les équations de F_a ssi
$1 + a \times (-1) - 1 = 0$ et $2 \times 1 - 1 + (a-1) \times 2 = 0$
Or , pour la première équation, $1 - a - 1 = 0 \iff a = 0$, mais ce a ne vérifie pas la seconde équation $(2 - 1 - 2 = -1 \neq 0)$.
Conclusion : $\boxed{\text{Il n'existe pas } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } u_1 \in F_a}$
De même pour u_2 et u_3 : ils n'appartiennent pas à F_a quelquesoit $a \in \mathbb{R}$.
(b) Comme $u_1 \in G$ mais $u_1 \notin F_a$, $\boxed{G \text{ n'est pas inclus dans } F_a}$

4. (a) Ses coordonnées ne vérifient pas l'équation $3x + y - t = 0$ car $0 + 0 - 1 \neq 0$. Il n'est donc pas dans G.
(b) D'après la question 1(b), le vecteur $(0,0,0,2)$ est un vecteur d'une base de F_1 $(a = 1)$. Puisque $(0,0,0,2) = 2\,(0,0,0,1)$, $(0,0,0,2) \notin G$, donc $\boxed{F_1 \text{ n'est pas inclus dans } G}$
(c) Tout vecteur $(x,y,z,t) \in F_a \cap G$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & 2y & - & z & & & = 0 \\ 3x & + & y & & & - & t & = 0 \\ x & + & ay & - & z & & & = 0 \\ 2x & + & y & & & + & (a-1)t & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrll} 3x & + & 2y & - & z & & & = 0 & \\ & - & y & + & z & - & t & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & (3a-2)y & - & 2z & & & = 0 & L_3 \leftarrow 3\,L_3 - L_1 \\ & - & y & + & 2z & + & 3(a-1)t & = 0 & L_4 \leftarrow 3\,L_4 - 2\,L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrll} 3x & + & 2y & - & z & & & = 0 & \\ & - & y & + & z & - & t & = 0 & \\ & & & & (3a-4)z & - & (3a-2)t & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + (3a-2)\,L_2 \\ & & & & z & + & (3a-2)t & = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrll} 3x & + & 2y & - & z & & & = 0 & \\ & - & y & + & z & - & t & = 0 & \\ & & & & z & + & (3a-2)t & = 0 & \\ & & & & (3a-4)z & - & (3a-2)t & = 0 & L_4 \leftrightarrow L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrll} 3x & + & 2y & - & z & & & = 0 & \\ & - & y & + & z & - & t & = 0 & \\ & & & & z & + & (3a-2)t & = 0 & \\ & & & & & - & 3(3a-2)(a-1)t & = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - (3a-4)L_3 \end{array}\right.$$

$*$ $\boxed{\text{Si } a \neq \dfrac{2}{3} \text{ et } a \neq 1}$ $x = 0$ et $y = 0$ et $z = 0$ et $t = 0$
donc $\boxed{F_a \cap G = \{(0,0,0,0)\} \text{ et } \dim F_a \cap G = 0}$
$*$ Si $a = 1$:

$$(x,y,z,t) \in F_a \cap G \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & 2y & - & z & & & = 0 \\ & - & y & + & z & - & t & = 0 \\ & & & & z & + & t & = 0 \\ & & & & & - & & 0 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}\,(-2y + z) = t \\ y = z - t = -2t \\ z = -t \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{F_1 \cap G = \{(t, -2t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = Vect\,((1,-2,-1,1))}$ et $\boxed{\dim F_1 \cap G = 1}$
$*$ Si $a = \dfrac{2}{3}$:

$$(x,y,z,t) \in F_a \cap G \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & 2y & - & z & & & = 0 \\ & - & y & + & z & - & t & = 0 \\ & & & & z & & & = 0 \\ & & & & & & & 0 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}\,(-2y + z) = \frac{2}{3}\,t \\ y = z - t = -t \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{F_{\frac{2}{3}} \cap G = \left\{\left(\frac{2}{3}\,t, -t, 0, t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left((2, -3, 0, 3)\right)}$ et $\boxed{\dim F_{\frac{2}{3}} \cap G = 1}$

FIN DU CORRIGÉ
