DS8. Corrigé
27/05/2026.

Partie 1.

(1.) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y-z\}$

$= \{(-y-z, y, z), \ y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1), \ y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}(s_1, s_2)$ où $\boxed{\begin{array}{l} s_1 = (-1,1,0) \\ s_2 = (-1,0,1) \end{array}}$

donc **E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.**

De plus, (s_1, s_2) est libre donc **(s_1, s_2) est une base de E et $\dim(E) = 2$**

(2.) $\forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \forall v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$f_m(u+v) = \big((x+a) + m(y+b) + (z+c), \ m(x+a) + (y+b) + (z+c), \ (x+a) + (y+b) + m(z+c)\big)$

$= \big((x+my+z) + (a+mb+c), \ (mx+y+z) + (ma+b+c), \ (x+y+mz) + (a+b+mc)\big)$

$= (x+my+z, \ mx+y+z, \ x+y+mz) + (a+mb+c, \ ma+b+c, \ a+b+mc)$

$= f_m(u) + f_m(v)$

et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$f_m(\lambda u) = (\lambda x + m(\lambda y) + \lambda z, \ m(\lambda x) + \lambda y + \lambda z, \ \lambda x + \lambda y + m(\lambda z))$

$$= \lambda \left(x + my + z,\ mx + y + z,\ x + y + mz\right)$$

$$= \lambda f_m(u)$$

Ccl : f_m est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{f_m \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.}$

Partie . 2 .

1. Puisque $F_m = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_m)$, F_m est un ev.

2. Soit P_m : la matrice qui représente $\mathcal{B}_m$ dans la base canonique.

$$\mathrm{rg}\, P_m = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m \\ 0 & 1-m & m-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & (1-m)(1+m) \\ 0 & 1-m & m-1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - mL_3 .$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & (1-m)(1+m) \\ 0 & 0 & (m-1)(2+m) \end{pmatrix} = 3 \iff \begin{matrix} 1-m \neq 0 \text{ et} \\ (m-1)(2+m) \neq 0 \end{matrix}$$

ccl : $\boxed{rg(\mathcal{B}_m)=3 \iff m\neq 1 \text{ et } m\neq -2}$

(3.) $F_1 = Vect(\mathcal{B}_1) = Vect\big((1,1,1),(1,1,1),(1,1,1)\big)$

$\boxed{F_1 = Vect(1,1,1) \quad \text{donc } \dim F_1 = 1}$

(4.) (a) $F_{-2} = Vect(\mathcal{B}_{-2}) = Vect\big(\underbrace{(1,-2,1)}_{u_{-2}}, \underbrace{(-2,1,1)}_{v_{-2}}, \underbrace{(1,1,-2)}_{w_{-2}}\big)$

or $u_{-2}+v_{-2}+w_{-2}=0$

donc $u_{-2} = -v_{-2}-w_{-2}$

donc $F_{-2} = Vect(v_{-2}, w_{-2})$

de +, (v_{-2},w_{-2}) libre donc $\boxed{(v_{-2},w_{-2}) \text{ est une base de } F_{-2} \text{ et } \dim(F_{-2})=2}$

(b) $u_{-2} = (1,-2,1)$ avec $1+(-2)+1=0$

donc $\boxed{u_{-2}\in E}$

de même : $v_{-2}\in E$ et $w_{-2}\in E$

(c) Puisque E est un ev, $Vect(u_{-2},v_{-2},w_{-2})\subset E$

soit $F_{-2}\subset E$

or $\dim(F_{-2}) = 2 = \dim(E)$

ccl : $\boxed{F_{-2}=E}$

Partie 3.

(1.) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$f_m(e_1) = f_m(1,0,0) = (1, m, 1)$$
$$f_m(e_2) = f_m(0,1,0) = (m, 1, 1)$$
$$f_m(e_3) = f_m(0,0,1) = (1, 1, m)$$

donc $\boxed{A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}}$

(2.) (a) $\mathrm{Im}(f_m) = \mathrm{Vect}\big((1,m,1), (m,1,1), (1,1,m)\big)$

$= \mathrm{Vect}(u_m, v_m, w_m)$

$= F_m$

(b)

f_m bijectif $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f_m) = 3 \Leftrightarrow \dim(F_m) = 3 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mathcal{B}_m) = 3$

$\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

(3.) (a) $\mathrm{Im}(f_1) = F_1$ donc $\boxed{u_1 = (1,1,1) \text{ base de } \mathrm{Im}(f_1) \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(f_1)) = 1}$

(b)

$\ker(f_1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f_1(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\} = E$

(c) (v_{-2}, w_{-2}) est une base de $\ker(f_1)$ et $\dim(\ker(f_1)) = 2$.

(c1)

i. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$A_{-2} - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$rg(A_{-2} - \lambda I) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-\lambda \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3.$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3-2\lambda \\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3-2\lambda \\ 0 & 0 & -3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3-2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) \end{pmatrix}$$

(d) $rg(f_{-2} - \lambda\, id) \neq 3 \iff rg(A_{-2} - \lambda I) \neq 3 \iff 3-\lambda \neq 0$ ou $-\lambda(3+\lambda) \neq 0$

$\iff \lambda = 3$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = -3$

$\iff \boxed{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,-3,3\}.}$

ii. $E_0 = \ker(f_{-2}) = Vect(u_1)$ donc $\boxed{u_1 \text{ base de } E_0 \text{ et } \dim E_0 = 1}$

$E_{-3} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (f_{-2} + 3\cdot id)(x,y,z) = (0,0,0)\}$.

$$A_{-2} - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$ donc $(f_{-2} + 3\, id)(x,y,z) = (-2x-2y+z, -2x-2y+z, x+y-5z)$

donc on résout $\begin{cases} -2x-2y+z=0 \\ -2x-2y+z=0 \\ x+y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y+z=0 \\ x+y-5z=0 \end{cases}$

$\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x-2y+z=0. \\ -9z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y \in \mathbb{R} \\ z=0. \end{cases}$

donc $\ker(f_{-2}-3id) = \{(-y,y,0),\ y \in \mathbb{R}\}$
$= \{y(-1,1,0),\ y \in \mathbb{R}\}$
$= Vect(u)$ où $\boxed{u=(-1,1,0) \text{ u base de } E_3 \text{ et } \dim E_3 = 1}$

$E_{-3} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (f_{-2}+3id)(x,y,z) = (0,0,0)\}.$

or $A_{-2}+3I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $(f_{-2}+3id)(x,y,z) = (4x-2y+z, -2x+4y+z, x+y+z)$

donc on résout: $\begin{cases} 4x-2y+z=0 \\ -2x+4y+z=0. \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=0. \\ -2x+4y+z=0. \\ 4x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0. \\ 6y+3z=0 & L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ -6y-3z=0. & L_3 \leftarrow L_3-4L_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z=-y+2y=y \\ z=-2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

donc $E_{-3} = Vect((1,-2,1)) = Vect(u_2)$

$\boxed{u_2 \text{ base de } E_{-3} \text{ et } \dim(E_{-3}) = 1}$

iii $\mathcal{C} = \{u_1, u_{-2}, u\}$

On prend P la matrice qui représente $\mathcal{C}$ dans la base canonique.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} P = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$ donc $\underline{\operatorname{rg}(\mathcal{C}) = 3}$. donc $\mathcal{C}$ est libre

et $\mathcal{C}$ a 3 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc $\underline{\underline{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}}$.

iv

$f_{-2}(u_1) = 0.\, u_1 = 0$ car $u_1 \in E_0$.

$f_{-2}(u_{-2}) = (-3).\, u_{-2}$ car $u_{-2} \in E_{-3}$.

$f_{-2}(u) = 3.\, u$ car $u \in E_3$.

Conclusion: $$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

(c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $A_1^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\, A_1$.

Donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $A_1^n = 3^{n-1} A_1$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : f^n = 3^{n-1} f}$

4.

(a) $A_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(f_{-2}) = F_{-2} = E$ donc (u_{-2}, w_{-2}) base de $\mathrm{Im}(f_{-2})$
et $\dim(\mathrm{Im}(f_{-2})) = 2$

(b)

$\mathrm{Ker} f_{-2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f_{-2}(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y - z = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

donc $\mathrm{Ker} f_{-2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z \text{ et } y = z\}$

$= \{(z,z,z),\ z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,1,1),\ z \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}(u_1)$

Donc u_1 est une base de $\mathrm{Ker} f_{-2}$ et $\dim(\mathrm{Im}(f_{-2})) = 1$