

DS 8 – Mathématiques

Mercredi 27 mai 2026

Durée de l'épreuve : 1 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un unique problème de mathématiques.

PROBLÈME

Pour tout réel m , on considère

— trois vecteurs de \mathbb{R}^3 :

$$u_m = (1, m, 1) \quad v_m = (m, 1, 1) \text{ et } w_m = (1, 1, m)$$

— la famille \mathcal{B}_m composée de ces trois vecteurs, soit :

$$\mathcal{B}_m = (u_m, v_m, w_m)$$

— l'espace vectoriel F_m engendré par la famille \mathcal{B}_m , soit :

$$F_m = \text{Vect}(\mathcal{B}_m)$$

— l'application f_m de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + my + z, mx + y + z, x + y + mz) \end{array}$$

Enfin, on définit E le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 par :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

Partie 1 : Question préliminaire

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , et en donner base et dimension.
2. Montrer que pour tout réel m , f_m est un endomorphisme de \mathbb{R}^3

Partie 2 : Étude de l'espace vectoriel F_m

1. Justifier que pour tout réel m , F_m est bien un espace vectoriel.
2. Montrer que : $\forall m \in \mathbb{R}, \text{rg}(\mathcal{B}_m) = 3 \iff m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$
3. Dans cette question, on suppose $m = 1$: déterminer base et dimension de F_1 .
4. Dans cette question, on suppose $m = -2$:
 - (a) Déterminer base et dimension de F_{-2} .
 - (b) Montrer que $u_{-2} \in E$, et $v_{-2} \in E$ et $w_{-2} \in E$
 - (c) En déduire que $F_{-2} = E$

Partie 3 : Étude de l'endomorphisme f_m

1. Déterminer la matrice qui représente f_m dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
On la note A_m
2. Soit $m \in \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que $F_m = \text{Im}(f_m)$
 - (b) En déduire pour quelle(s) valeur(s) de m l'endomorphisme f_m est bijectif.
3. **Dans cette question, on suppose $m = 1$**
 - (a) Déterminer base et dimension de $\text{Im}(f_1)$
 - (b) Montrer que $\ker(f_1) = E$, en déduire base et dimension de $\ker(f_1)$.
 - (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n = 3^{n-1} f$.
4. **Dans cette question, on suppose $m = -2$**
 - (a) Déterminer base et dimension de $\text{Im}(f_{-2})$.
 - (b) Déterminer base et dimension de $\ker(f_{-2})$.
 - (c)
 - i. Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{rg}(f_{-2} - \lambda \text{id}) \neq 3 \iff \lambda \in \{0, -3, 3\}$
 - ii. Déterminer base et dimension de $E_\lambda = \ker(f_{-2} - \lambda \text{id})$ pour $\lambda \in \{0, -3, 3\}$.
On note \mathcal{C}_λ la base obtenue pour chaque espace E_λ .
 - iii. On considère la famille $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_{-3} \cup \mathcal{C}_3$ obtenue en réunissant les vecteurs de chaque base.
Déterminer $\text{rg}(\mathcal{C})$, en déduire que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^3
 - iv. Déterminer D , la matrice qui représente f_{-2} dans la base \mathcal{C} .