

DS 1 – Mathématiques

Mercredi 16 Septembre 2026

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de six exercices de mathématiques.

Exercice 1. Écrire les expressions suivantes sous forme de fractions irréductibles :

$$1. A = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{9}{4}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}}$$

$$2. B = \frac{a^2 b^{-3}}{(a^{-1} b^2)^3} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} \quad (a, b \neq 0)$$

$$3. C = \frac{2^{n+2} - 2^n}{2^{n+1} + 2^{n+3}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2}{4n + 1}$

Exercice 3. :

1. Étudier le signe du trinôme $x^2 - 2x - 1$ pour tout réel x .
2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}$$

1. Calculer les termes u_2 , u_3 et u_4 .
2. En déduire une expression de u_n en fonction de $n \geq 1$.

Exercice 5. :

1. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le trinôme : $x^2 - 3x + 2$

2. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} > \frac{1}{2x - 2}$

Exercice 6. :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

(a) $x^2 - x + 1 = 0$

(b) $x^2 - 3x + 1 = 0$

2. On considère l'équation

$$(E) \quad x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

(a) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E)

(b) Montrer que : $(E) \iff \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$

(c) Pour tout x réel non nul, on pose $X = x + \frac{1}{x}$. Montrer que $X^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

(d) En déduire les solutions de (E).