

Exercice 1

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1.} \quad A &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{9}{4}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}} = \frac{\frac{2^3 \times 9^{-2}}{2^3 \times 4^{-2}}}{\frac{3^{-4}}{2^{-4}}} \\
 &= \frac{2^3 \times (3^2)^{-2}}{3^3 \times (2^2)^{-2}} \times \frac{2^{-4}}{3^{-4}} \\
 &= \frac{2^{-1} \times 3^{-4}}{3^{-1} \times 2^{-4}} \\
 &= \boxed{\frac{2^3}{3^3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2.} \quad B &= \frac{a^2 b^{-3}}{(a^{-1} b^2)^3} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \frac{\cancel{a^2} b^{-3} \times \cancel{a^{-2}}}{a^{-3} \times b^6 \times b^{-2}} \\
 &= \frac{\cancel{b^{-3}}}{a^{-3} \times b^4} = \boxed{\frac{a^3}{b^7}}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3.} \quad C = \frac{2^{n+2} - 2^n}{2^{n+1} + 2^{n+3}} = \frac{2^n (2^2 - 1)}{2^{n+1} (1 + 2^2)} = \frac{3}{2 \times 5} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

Exercice 2.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$; $u_n = \frac{2}{4n+1}$

$$\begin{array}{l} \underline{n=1} \quad \left. \begin{array}{l} u_1 = \frac{u_0}{2 \times u_0 + 1} = \frac{2}{2 \times 2 + 1} = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{4 \times 1 + 1} = \frac{2}{4 + 1} = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \text{ donc } u_1 = \frac{2}{4 \times 1 + 1} \quad \checkmark \end{array}$$

Induction: supposons que $u_n = \frac{2}{4n+1}$ à un certain rang n .

$$\text{montrons que } u_{n+1} = \frac{2}{4(n+1)+1} = \frac{2}{4n+5}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1} \quad \text{or par (H.A.): } u_n = \frac{2}{4n+1}$$

$$\text{donc } u_{n+1} = \frac{\frac{2}{4n+1}}{2 \times \frac{2}{4n+1} + 1} = \frac{2}{4n+1} \times \frac{1}{\frac{4+4n+1}{4n+1}}$$

$$= \frac{2}{\cancel{4n+1}} \times \frac{4n+1}{5+4n} = \frac{2}{4n+5} \quad \checkmark$$

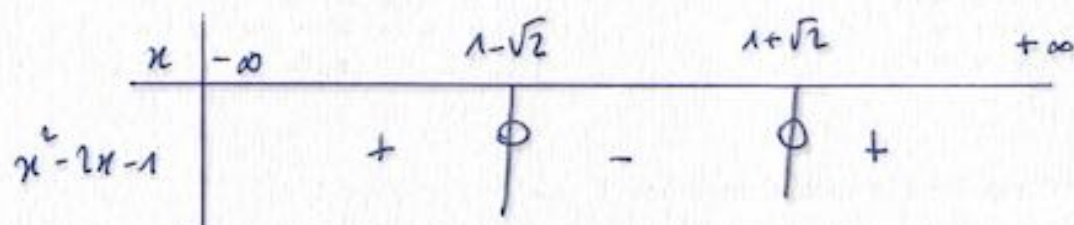
Conclusion: par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2}{4n+1}$

Exercice 3.

① $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$

donc deux racines réelles: $\frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

et $\frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$



② Par récurrence sur $n \geq 4$: $2^n \geq n^2$

$n=4$: $24^2 = (2^2)^2 = 2^4 \quad \checkmark$

$n \geq 4$: Supposons que $2^n \geq n^2$ à un certain rang n .
Montrons que $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$2^{n+1} = 2^n \times 2$ or par (H) $2^n \geq n^2$
donc ($2 > 0$) $2^{n+1} \geq 2n^2$

or $2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - (n^2 + 2n + 1)$
 $= n^2 - 2n - 1$

or d'après ①, $n \geq 4$, $1 + \sqrt{2}$ donc $n^2 - 2n - 1 \geq 0$

donc $2^{n+1} \geq (n+1)^2$: récurrence achevée

Conclusion: par récurrence $\forall n \geq 4, 2^n \geq n^2$

Exercice 4.

①.

$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{1+u_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{\sqrt{1+u_2^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_4 = \frac{u_3}{\sqrt{1+u_3^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{4}}$$

$$u_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

②.

Par récurrence sur $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$n=1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 = u_1 \quad \checkmark$$

$n \geq 1$. Supposons que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ à un certain rang n

Montrons que $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$$

$$\text{or } u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ par H.R.}$$

$$\text{donc } u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

cl:

par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 5.

(1.)

1 est racine évidente et d'autre vaut: $1 \times \alpha = 2$
 $\alpha = 2$

donc $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

(2.)

On résout sur $|\mathbb{R}| \setminus \{1, 2\}$:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} > \frac{1}{2x - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} > \frac{1}{2(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{2(x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - (x-2)}{2(x-1)(x-2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{2(x^2-3x+2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{x^2-3x+2} > 0.$$

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$	
$4-x$		+	+	+	0 -	
x^2-3x+2		+	0 -	0 -	+	+
$\frac{4-x}{x^2-3x+2}$		+	-	+	0 -	-

$$S =]-\infty, 1[\cup]2, 4[$$

Exercice 6.

1.

(a)

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$\text{donc } S = \emptyset$$

(b)

$$\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$$

$$\text{donc deux racines réelles, } S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

2.

(a)

$$0^4 - 4 \times 0^3 + 5 \times 0^2 - 4 \times 0 + 1 = 1 \neq 0.$$

$$\text{donc } 0 \text{ n'est pas solution de (E)}$$

(b)

donc on résout (E) sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \neq 0$,

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{x} (x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 5 = 0.$$

(c)

$$\forall x \neq 0, \quad X^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{donc } \boxed{X^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

(d)

$$\forall x \neq 0, \text{ on pose } X = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{donc } (E) \Leftrightarrow X^2 - 2 - 4X + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 4X + 3 = 0.$$

1 est racine évidente donc l'autre est 3.

$$\text{donc } (E) \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 3.$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \quad \text{ou} \quad x + \frac{1}{x} = 3.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 + 1}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} (x \neq 0) \\ \text{(question 1)} \end{matrix} \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad (\neq 0) \quad \text{ou} \quad x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (\neq 0)$$

Conclusion:

$$\boxed{S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}}.$$