

DS 2 – Mathématiques

Mercredi 7 octobre 2026

Durée de l'épreuve : 2 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de quatre exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1. langage PYTHON

- Écrire une fonction `aire(r)` de paramètre `r`, qui calcule et renvoie l'aire d'un disque de rayon r .
- Écrire une fonction `DS2(x)` de paramètre `x`, qui renvoie l'inverse du carré de tout réel x .
- Écrire un script qui teste l'égalité : $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.
On admet que cette égalité est vraie. D'après vous, que renvoie l'ordinateur ? JUSTIFIEZ votre réponse.

Exercice 2. Calculer les sommes et produits suivants :

- $\prod_{k=3}^n \exp\left(\frac{2k-1}{n}\right)$, ($n \geq 3$)
- $\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$, ($n \geq 2$)
- $\sum_{k=2}^n \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k+1) \ln(k)}$, ($n \geq 2$)

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 2^k = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 8 + \cdots + n^2 2^n$$

- Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n - 2S_n = 6 + 2^{n+1} (-n^2 + 2n - 3)$$

- En déduire une expression de S_n en fonction de n .

Exercice 4. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la relation :

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{x_n} + x_{n+1}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (n+1)!$.

Exercice 5. : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e^3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e \sqrt{u_n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Exprimer u_n en fonction de n (*on pourra poser une suite auxiliaire judicieuse*)
3. Donner la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$