DS2 - Mathématiques.
Corrigé
7/10/2026

Exercice 2

1. $\prod_{k=3}^{n} \exp\left(\frac{2k-1}{n}\right) = \exp\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{n}\right)$

avec $\sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{n} = \frac{1}{n}\left(2\left(\sum_{k=3}^{n} k\right) - \sum_{k=3}^{n} 1\right)$

$= \frac{2}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k - 1 - 2\right) - \frac{1}{n} \times (n-3+1)$

$= \frac{2}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 3\right) - \frac{n-2}{n}$

$= \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)-6}{2} - \frac{n-2}{n}$

$= \frac{n^2+n-6-n+2}{n} = \frac{n^2-4}{n}$

donc : $\boxed{\prod_{k=3}^{n} \exp\left(\frac{2k-1}{3}\right) = e^{\frac{n^2-4}{n}}}$

2. $\ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \ln(k^2) - \ln(k^2-1)$

$= 2\ln(k) - \ln((k-1)(k+1))$

$= 2\ln(k) - \ln(k-1) - \ln(k+1)$

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)$$

$$= 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{\substack{k=1 \\ (k'=k-1)}}^{n-1} \ln(k) - \sum_{\substack{k=3 \\ (k'=k+1)}}^{n+1} \ln(k)$$

$$= 2\left(\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln(2) + \ln(n)\right) - \left(\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln(1) + \ln(2)\right) - \left(\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln(n) + \ln(n+1)\right)$$

$$= 2\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + 2\ln(2) + 2\ln(n) - \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) - \ln(2) - \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) - \ln(n) - \ln(n+1)$$

$$= \ln(2) + \ln(n) - \ln(n+1)$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \ln(2) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

3. $$\frac{\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)}{\ln(k+1)\ln(k)} = \frac{\ln(k) - \ln(k+1)}{\ln(k)\ln(k+1)}$$

$$= \frac{1}{\ln(k+1)} - \frac{1}{\ln(k)}$$

Donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{\ln(k+1)} - \frac{1}{\ln(k)}\right]$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k+1)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)}$$

$$= \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{\ln(k)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)}$$

$(k' = k+1)$

$$= \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\ln(k)} + \frac{1}{\ln(n+1)} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(2)}$$

(d):

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)}{\ln(k+1)\ln(k)} = \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(2)}}$$

Exercice 3

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\,2^k = 2 + (n-1)\,2^{n+1}$$

* $\underline{n=1}$: $\sum_{k=1}^{1} k\,2^k = 1 \times 2^1 = 2$ et $2 + (1-1)\,2^{1+1} = 2$

récurrence initialisée

* $\underline{n \geq 1}$ Supposons que $\sum_{k=1}^{n} k\,2^k = 2 + (n-1)\,2^{n+1}$ à un certain rang $n \geq 1$

Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k\,2^k = 2 + n\,2^{n+2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\,2^k = \sum_{k=1}^{n} k\,2^k + (n+1)\,2^{n+1}$$

$$= 2 + (n-1)\,2^{n+1} + (n+1)\,2^{n+1} \quad \text{par (HR)}$$

$$= 2 + 2^{n+1}\left(n - 1 + n + 1\right)$$

$$= 2 + 2^{n+1} \times 2n.$$

$$= 2 + n\,2^{n+2} \quad \checkmark$$

récurrence achevée

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n - 2S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2\,2^k - \sum_{k=1}^{n} k^2\,2^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2\,2^k - \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2\,2^k}_{k' = k-1}.$$

$$S_n - 2S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 2^k - \sum_{k=2}^{n+1} k^2 2^k + 2\sum_{k=2}^{n+1} k 2^k - \sum_{k=2}^{n+1} 2^k.$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k^2 2^k + 2 - \sum_{k=2}^{n} k^2 2^k - (n+1)^2 2^{n+1} + 2\left(\sum_{k=1}^{n+1} k 2^k - 2\right)$$

$$- \frac{2^2 - 2^{n+2}}{1-2} \quad (2 \neq 1)$$

$$= 2 - (n+1)^2 2^{n+1} + 2\left(\underbrace{2 + n 2^{n+2} - 2}_{\text{question 1}}\right) + 4 - 2^{n+2}$$

$$= 6 - (n+1)^2 2^{n+1} + 2n 2^{n+2} - 2^{n+2}$$

$$= 6 - (n+1)^2 2^{n+1} + 2^{n+2}(2n-1)$$

$$= 6 + 2^{n+1}\left(2(2n-1) - (n+1)^2\right)$$

$$= 6 + 2^{n+1}\left(4n - 2 - n^2 - 2n - 1\right)$$

$$\boxed{S_n - 2S_n = 6 + \left(-n^2 + 2n - 3\right) 2^{n+1}}$$

(3.) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - 2S_n = -S_n = 6 + 2^{n+1}\left(-n^2 + 2n - 3\right)$

donc $\boxed{S_n = -6 + 2^{n+1}\left(n^2 - 2n + 3\right)}$

Exercice 4

Par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$: $x_n = (n+1)!$

- $n=0$: $x_0 = 1$ et $(0+1)! = 1! = 1$ V
- $n=1$: $x_1 = 2$ et $(1+1)! = 2! = 2$ V

} récurrence initialisée

- Supposons que $x_n = (n+1)!$ et $x_{n+1} = (n+2)!$ à un certain rang $n \geq 0$.

Montrons que $x_{n+2} = (n+3)!$

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{x_n} + x_{n+1}$$

$$= \frac{((n+2)!)^2}{(n+1)!} + (n+2)! \quad \text{par (HR)}$$

$$= \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \times (n+2)! + (n+2)!$$

$$= (n+2)(n+2)! + (n+2)!$$

$$= (n+2)!\,(n+2+1) = (n+2)!\,(n+3)$$

$$= (n+3)!$$

récurrence achevée

Exercice 5

(1.) (u_n) bien définie ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ donc la suite est bien définie.

(2.) Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, on peut poser $v_n = \ln(u_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln\left(e\sqrt{u_n}\right) = \ln(e) + \ln\left(\sqrt{u_n}\right)$

$= 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n)$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n + 1$$

On résout : $x = \frac{1}{2}x + 1 \iff \frac{1}{2}x = 1 \iff x = 2$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - 2$

(w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 2 = \ln(u_0) - 2 = \ln(e^3) - 2 = 3 - 2 = 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

$$u_n = e^{v_n} = \exp\left(2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(3.) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = e^2}$