DM2. Corrigé
16/10/2026

Exercice 1

1. $$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{i^2+1}}{\sqrt{(i+1)^2+1}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \sqrt{i^2+1}}{\prod_{i=1}^{n} \sqrt{(i+1)^2+1}} \underset{i'=i+1}{=} \frac{\prod_{i=1}^{n} \sqrt{i^2+1}}{\prod_{i=2}^{n+1} \sqrt{i^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \prod_{i=2}^{n} \sqrt{i^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1} \times \prod_{i=2}^{n} \sqrt{i^2+1}}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+2n+2}}}$$

2. $$\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{2^i}{2^j} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{2^i}{2^j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2^j} \sum_{i=1}^{j} 2^i \right) \underset{2 \neq 1}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \times \frac{2 - 2^{j+1}}{1-2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{2^{j+1} - 2}{2^j} = \sum_{j=1}^{n} \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \right]$$

$$= 2n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \qquad (j' = j-1)$$

$$= 2n - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{2} \neq 1$$

$$= \boxed{2n - 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

Exercice 2

```
import math as m
def coeff_binom(n,p):
    if 0<=p<=n:
        return m.factorial(n)/(m.factorial(p)*m.factorial(n-p))
    return 0
```

Exercice 3

(1.) Ens de résolution :

$\frac{x+2}{x-1} > 0$ et $x-1 \neq 0$ et $x-1>0$ et $2x+1>0$

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+2}{x-1}$		$+$	0	$-$		$-$	$\|\|$	$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

On résout pour tout $x > 1$

$(1) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+2}{x-1} \times (x-1)\right) = \ln(2x+1)$

$\Leftrightarrow \ln(x+2) = \ln(2x+1)$

$\Leftrightarrow x+2 = 2x+1$

$\Leftrightarrow x = 1 \notin]1,+\infty[$ donc $\boxed{S = \phi}$

(2.) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$(2) \iff (e^x)^2 - 3e^x - 4 \geq 0$ car $e^x > 0$

on pose $X = e^x \geq 0$

donc $(2) \iff X^2 - 3X - 4 \geq 0$. (racines : -1 et 4)

X	0		4	$+\infty$
X^2-3X-4	‖	$-$	0	$+$

donc $(2) \iff X \geq 4$.

$\iff e^x \geq 4$

$\iff x \geq \ln(4)$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = [\ln(4), +\infty[}$