Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Madame MOREL

Raisonnement par récurrence

1 Première approche

Considérons une propriété qui dépend d'un *entier naturel* n. On la note $\mathcal{P}(n)$, et on dit que $\mathcal{P}(n)$ est la propriété au rang n.

Exemple 1 Considérons la proposition $\mathcal{P}(n)\ :\ 2n+3<20$.
La proposition $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie pour $n=0$? Pour $n=1$? Pour $n=2$? Au rang $n=3$? Au rang $n=4$?
Peut-on en déduire qu'elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$?

Exemple 2 Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)\ :\ 5^n \geqslant n^2+n+1$.
La proposition au rang $n+1$, $\mathcal{P}(n+1)$ est :

1. $5^n \geqslant n^2+n+1$
2. $5^{n+1} \geqslant (n+1)^2+(n+1)+1$
3. $5^{n+1} \geqslant n^2+n+3$
4. $5^{n+1} \geqslant n^2+3n+3$

Exemple 3 Dans chaque cas, énoncer la propriété au rang $n+1$:

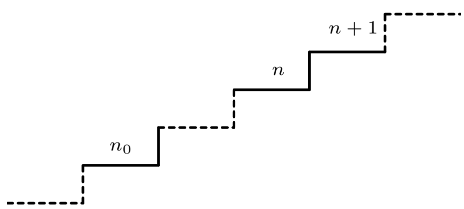
1. $\mathcal{P}(n)\ :\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$
2. $\mathcal{P}(n)\ :\ u_n+2 \leqslant u_{n+1}$
3. $\mathcal{P}(n)\ :\ u_n = 2n+2$

Exemple 4 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

Calculer u_n pour n compris entre 0 et 4. Pour tout entier naturel n, quelle expression peut-on conjecturer pour u_n? Comment le démontrer ? Rien ne prouve que cette conjecture observée aux premiers rangs se généralise. On ne peut pas faire toutes les vérifications. On a alors recours au **raisonnement par récurrence.**

que l'on peut illustrer à l'aide d'un escalier.
Si on est capable d'accéder à une marche n_0 de l'escalier et si on sait passer d'une marche n à la suivante $n+1$ alors, on peut accéder à toute marche au-dessus de la marche n_0.



ou par les dominos .
Deux conditions doivent être remplies : le premier domino tombe et la chute de tout domino entraîne celle du suivant.

2 Récurrence (simple ou sur une génération)

2.1 Le raisonnement

Soit n_0 un entier fixé. Le but du raisonnement par récurrence est de montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$ considérée est vraie à partir du rang n_0, i.e $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

CAPACITÉ 1 : rédaction d'un raisonnement par récurrence.
La RÉDACTION d'un raisonnement par récurrence est FONDAMENTALE.

1. **Annonce:** pour être complète, elle doit contenir:
   $*$ Le mot récurrence,
   $*$ La propriété $\mathcal{P}(n)$ à démontrer,
   $*$ Pour quels rangs cette propriété doit être vraie.

   Exemple: Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \geqslant n$.
   Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $2^n \geqslant n$.

2. **Initialisation:** on **MONTRE** que la propriété est vraie au rang initial.

   Exemple: $2^1 = 2 \geqslant 1$, donc la propriété est initialisée.

   ATTENTION!! Il faut ÉTABLIR $\mathcal{P}(n_0)$ et non la recopier "bêtement" ...

3. **Hérédité**: on montre que **SI** la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie **à un certain rang** $n \geq n_0$, **ALORS** $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie. ($\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$)
   $\mathcal{P}(n)$ s'appelle **l'hypothèse de récurrence**.

   Exemple:
   Supposons que $2^n \geqslant n$ à un certain rang $n \geqslant 1$.
   Montrons que $2^{n+1} \geqslant n+1$:
   $2^{n+1} = 2^n \times 2$, or par hypothèse de récurrence, $2^n \geqslant n$, donc $2^{n+1} \geqslant n \times 2$.
   Donc $2^{n+1} \geqslant n + n \geqslant n+1$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

4. **Conclusion**: Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

   Exemple: Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\, 2^n \geqslant n}$

Remarque 1 ATTENTION AUX ERREURS DE RÉDACTION (trop souvent rencontrées)!!!
• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie **pour tout** $n \geqslant n_0$ (ou $\forall n \geqslant n_0$)...
• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie **à partir** d'un certain rang $n \geqslant n_0$...

2.2 La mise en oeuvre : comment montrer une hérédité?

On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n et on veut montrer que la propriété est vraie au rang suivant, i.e que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
$\mathcal{P}(n)$ étant l'hypothèse de récurrence, on va s'en servir pour démontrer $\mathcal{P}(n+1)$.

Remarque 2 ATTENTION!
Si vous parvenez à montrer $\mathcal{P}(n+1)$ sans utiliser $\mathcal{P}(n)$, vous n'utilisez pas un raisonnement par récurrence!!
Dans votre rédaction, mettez bien en évidence à quel moment vous utilisez (HR) (hypothèse de récurrence), ça vous évitera cette erreur...

POINT METHODE 1 : Les trois points pour démontrer une hérédité.
Puisqu'on utilise $\mathcal{P}(n)$, il est fondamental de savoir se ramener au rang n.

1. **Revenir au rang n:**

   - dans le cas d'un produit, on pose: $x^{n+1} = x^n \times x$ ou $x^{n+1} = x \times x^n$.
   - dans le cas des suites récurrentes : on utilise la définition de la suite (par exemple, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$)

     Remarque 3 Certaines suites sont définies par une relation qui donne un terme en fonction des deux précédents (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n par exemple). Dans ce cas, une récurrence simple ne suffit plus (voir partie 2.1)

   On abordera d'autres cas plus tard (les sommes et produits, les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ et le chapitre sur les dérivées successives).

2. **Utiliser l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$:**
   L'étape précédente nous permet d'utiliser la propriété au rang n.

3. **Calculs finaux pour aboutir à $\mathcal{P}(n+1)$:** ils n'arrivent pas par hasard!
   Il faut bien mener ses calculs en fonction de l'objectif à atteindre, i.e $\mathcal{P}(n+1)$.

3 Récurrence sur plusieurs générations

3.1 Récurrence double (ou sur deux générations)

Exemple 5 Soit la suite u définie par:
$$\begin{cases} u_0 = 2 \text{ et } u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_{n+1} = 3\,u_n - 2\,u_{n-1} \end{cases}$$
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.
On utilisera un raisonnement par récurrence simple. Quel est le problème?

CAPACITÉ 2 : rédaction d'un raisonnement par récurrence double.
La RÉDACTION d'un raisonnement par récurrence double reste FONDAMENTALE.

1. Annonce: pour être complète, elle doit contenir:
   * Le mot récurrence **DOUBLE**,
   * La propriété $\mathcal{P}(n)$ à démontrer,
   * Pour quels rangs, cette propriété doit être vraie.

   Reprise de l'exemple 5:

2. **Initialisation:** on **montre** que la propriété est vraie aux **DEUX PREMIERS RANGS**.

   Reprise de l'exemple 5:

   ATTENTION!! Il faut ÉTABLIR $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ et non les recopier "bêtement" ...

3. **Hérédité**: on montre que **SI LES PROPRIÉTÉS** $\mathcal{P}(n-1)$ **et** $\mathcal{P}(n)$ sont vraies **à un certain rang** n, **ALORS** $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie. ($\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$)
   (ou bien: si les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie: tout dépend de la relation de récurrence donnée dans l'énoncé)

   Reprise de l'exemple 5:

4. **Conclusion**: Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

   Reprise de l'exemple 5:

3.2 Récurrence forte

Exemple 6 Considérons la suite u définie par:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.
On utilisera un raisonnement par récurrence simple. Quel est le problème?

POINT METHODE 2 : rédaction d'un raisonnement par récurrence forte.
La RÉDACTION d'un raisonnement par récurrence forte reste FONDAMENTALE.

1. **Annonce:** pour être complète, elle doit contenir:
   ∗ Le mot récurrence **FORTE**,
   ∗ La propriété $\mathcal{P}(n)$ à démontrer,
   ∗ Pour quels rangs, cette propriété doit être vraie.

   Reprise de l'exemple 6:

2. **Initialisation:** on **montre** que la propriété est vraie au rang initial.

   Reprise de l'exemple 6:

   ATTENTION!! Il faut ÉTABLIR $\mathcal{P}(n_0)$ et non le recopier "bêtement" ...

3. **Hérédité**: on montre que **SI** la propriété est vraie **JUSQU'À UN CERTAIN RANG** n, (i.e. $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \leqslant n$), **ALORS** $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.
   Citation du programme officiel: lorsqu'un raisonnement par récurrence nécessite une hypothèse dite "forte", la formulation de cette hypothèse devra être proposée.

   Reprise de l'exemple 6:

4. **Conclusion**: Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

   Reprise de l'exemple 6: