Trinômes du second degré

Définition 1 *On appelle* **trinôme du second degré** *une fonction polynôme de degré 2:*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = a\,x^2 + bx + c,\ \text{où } a, b, c \text{ sont trois réels tels que } \mathbf{a} \neq \mathbf{0}\,.$$

Définition 2 *On appelle* **discriminant** *le réel* $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Proposition 1 **(Factorisation d'un trinôme du second degré):**
(1) Si $\underline{\Delta > 0}$, *P a deux racines réelles:* $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\,.$$

P est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé de a à l'intérieur des racines:
$\forall x \in]-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty[$, *P(x) et a ont même signe,*
$\forall x \in [\alpha, \beta]$, *P(x) et −a ont même signe.*
(2) Si $\underline{\Delta = 0}$, *P a une racine réelle:* $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = a\,(x-\alpha)^2\,.$$

P est du signe de a sur $\mathbb{R}$.
(3) Si $\underline{\Delta < 0}$, *P n' a pas de racines réelles, donc P est du signe de a sur* $\mathbb{R}$.

Preuve:

POINT METHODE 1 : forme canonique

$$P(x) \;=\; a\,x^2 \;+\; bx \;+\; c \;\overset{a\neq 0}{=}\; a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}\,x}_{\text{forme canonique}} \;+ \frac{c}{a}\right) \;=\; a\left[(\qquad\quad)^2 - \qquad\quad + \frac{c}{a}\right] \;=\; a\left[(\qquad\quad)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

$*$ Si $\underline{\Delta < 0}$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, et on conclut.

$*$ Si $\underline{\Delta = 0}$, $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, et on conclut.

$*$ Si $\underline{\Delta > 0}$, on reconnaît une égalité remarquable: $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}\right)$.

(ATTENTION AUX VALEURS ABSOLUES: $\sqrt{a^2} = |a|!$)...

Si $a > 0$: $P(x) = a\left(x + \dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Si $a < 0$: $P(x) = a\left(x + \dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

On conclut ensuite par un tableau de signes: notant les racines $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$,
si $a > 0$, $\alpha < \beta$ et il vient:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$x-\alpha$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-\beta$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

$a < 0$ en exercice...

$\blacksquare$

Lecture graphique 1 : $a > 0$ *(exercice: faire le cas* $a < 0$*).*
Les courbes représentatives de P s'appellent des paraboles.

Proposition 2 **(somme et produit de racines):**
Soit Q *un trinôme du second degré vérifiant:* $Q(x) = x^2 + bx + c$ *(*$a = 1$*) et* $\Delta > 0$*. On note* α *et* β *ses deux racines réelles, et* $S = \alpha + \beta$*,* $P = \alpha\,\beta$*.*
Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $Q(x) = x^2 - S\,x + P$*, soit* $b = -S$ *et* $c = P$*.*

Preuve: Q s'écrit $Q(x) = (x - \alpha)\,(x - \beta)$, donc en développant: $Q(x) = \dots$

$\blacksquare$

Remarque 1 Si $a \neq 1$, on obtient: $Q(x) = a\,(x - \alpha)\,(x - \beta) = ax^2 - (aS)\,x + (aP)$, soit $\boxed{S = -\dfrac{b}{a} \text{ et } P = \dfrac{c}{a}}$

POINT METHODE 2 : Quand on a une racine évidente, on a l'autre **sans passer par le discriminant**!

1. Tester $1, -1, 2, -2$ pour trouver une racine évidente,
2. Puis trouver l'autre (en supposant qu'elle existe) via S ou P.

Soit $P(x) = x^2 - \dfrac{9}{2}\,x + 5$. On remarque que 2 est racine évidente, donc l'autre racine notée x_0 vérifie: $2 + x_0 = \dfrac{9}{2}$ et $2\,x_0 = 5$, soit $x_0 = \dfrac{5}{2}$.
Soit $Q(x) = 2x^2 - x - 1$. 1 est racine évidente et l'autre vérifie: $-1 = 2x_0$ et $-1 = -2(x_0 + 1)$, soit $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.