Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Madame MOREL

Éléments de logique

En mathématiques, on se situe dans le cadre d'une logique à deux valeurs. Une **proposition** mathématique (ou **assertion**) est soit vraie soit fausse.
Exemple: "Tout homme est mortel", "certains entiers sont strictement négatifs", "π est un un nombre entier".

Quand une proposition est écrite en langage mathématique, il faut savoir la traduire en langage français, et vice versa. Pour écrire une proposition avec rigueur et précision, on dispose des quantificateurs (voir la modélisation en probabilités).
Citation du programme officiel:

Compétence "modéliser":

> C'est traduire un phénomène en langage mathématique, élaborer des concepts et des outils lors d'une phase d'abstraction ou de conceptualisation.

Compétence "maîtriser le formalisme mathématique": Comprendre et utiliser le langage mathématique.

1 Quantificateurs

1.1 Quantificateur universel

Notation: $\boxed{\forall \text{ signifie: "pour tout"}}$
"$\forall\, x$" se lit: "pour tout x", "quel que soit x", "pour un x quelconque" ...
La phrase $\forall x \in E, P(x)$ signifie que: pour tout élément x de E, la propriété $P(x)$ est vraie.
Rappel: le signe $\in$ signifie "appartient".

Exemples:

- Soit la proposition P: "Tout homme est mortel".
  Traduction mathématique: on note H l'ensemble des hommes et $M(x)$ la proposition "x est mortel". Donc P s'écrit "$\forall x \in H,\, M(x)$".
- Soit la proposition Q: "$\forall x \in \mathbb{Z}\,, \forall y \in \mathbb{Z}\,, x + y = y + x$".
  Traduction en français: "l'addition des entiers est commutative".

Exercice 1 Ecrire mathématiquement la proposition: "Tout réel a un carré positif ou nul".

Remarque: La variable qui suit $\forall$ est **muette** au sens où le choix de la lettre pour la désigner n'a aucune importance.

1.2 Quantificateur existentiel

Notation: $\boxed{\exists \text{ signifie: "il existe"}}$
Remarque: "$\exists x$" signifie il existe **au moins** un x tel que; il n'y a pas forcément unicité de x:

$\exists\, x$ veut dire précisément: "il existe au moins un x, éventuellement plusieurs".

La phrase $\exists x \in E, P(x)$ signifie qu' il existe au moins un élément x de E tel que la propriété $P(x)$ est vraie.
Remarque: la virgule se lit "tel que": il existe au moins un élément x de E *tel que* $P(x)$ soit vraie. On peut aussi utiliser le symbole "/": $\exists x \in E/P(x)$.
Exemples:

- L'assertion "le polynôme P admet au moins une racine réelle" s'écrit: "$\exists\, x \in \mathbb{R}/P(x) = 0$".
- "il existe un réel supérieur à 2" se traduit mathématiquement par "$\exists x \in \mathbb{R}, x \geqslant$".

Notation: $\boxed{\exists\,! \text{ signifie "il existe } \textbf{un unique} \text{ élément"}}$
La phrase $\exists\,! x \in E/P(x)$ signifie: il existe **un et un seul** x de E tel que $P(x)$ soit vraie.

Exemple: "$\exists\,! \,x > 0\,,\, \ln x = 0$".

1.3 Ordre des quantificateurs

Exemple: Comparons les deux propositions suivantes:

$$P: \text{"}\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \leqslant n\text{"}.$$
$$Q: \text{"}\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, p \leqslant n\text{"}.$$

$*$ Lisons P: il existe (au moins) un entier n tel que pour tout entier p, p est inférieur à n. Ce qui signifie qu'il existe un entier n plus grand que tous les autres entiers: cette proposition est FAUSSE.
$*$ Lisons Q: pour tout entier p, il existe un entier n tel que p soit inférieur à n. Ce qui signifie: quand on se donne un entier p quelconque, on peut toujours trouver un entier n (qui dépend de p!!) plus grand. Cette proposition est VRAIE: $n = p + 1$ par exemple, ou $p + 15 \ldots$

Conclusion: ATTENTION A L'ORDRE DES QUANTIFICATEURS

$$\text{"}\forall x \in E, \exists\, y \in F\text{" et "}\exists\, y \in F\,,\ \forall x \in E\text{" n'ont pas le même sens.}$$

Exercice 2 Comparez:

$$\text{"}\forall x \in \mathbb{C}^*, \exists y \in \mathbb{C}, x\,y = 1\text{"} \qquad \text{"}\exists y \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{C}^*, x\,y = 1\text{"}$$

Remarque: Dans l'écriture "$\forall x \in E, \exists\, y \in F$", y dépend de l'élément x quelconque que l'on se donne dans E. Par contre, dans l'écriture "$\exists\, y \in F\,,\ \forall x \in E$", y ne dépend pas de x...

2 Opérations sur les propositions

Quand on a deux propositions P et Q, on peut former une nouvelle proposition grâce aux opérations suivantes.

2.1 Connecteurs logiques ET , OU

Définition. Soient P et Q deux propositions. On définit alors les propositions suivantes:

- La proposition P **ET** Q, qui est vraie quand P et Q sont vraies en même temps.
- La proposition P **OU** Q, qui est vraie quand l'**une au moins** des deux propositions P ou Q est vraie.

Exemples:

- La proposition "$-1 < x \leqslant 2$" a même sens que "$-1 < x$ **et** $x \leqslant 2$".
- "$x \geqslant 1$ **ou** $x < -2$"; "fromage OU dessert".

Remarque: Attention à la proposition P OU Q. D'après sa définition, P OU Q vrai signifie que l'on est dans l'un des trois cas suivants:

$*$ P vrai et Q faux
$*$ P faux et Q vrai
$*$ P vrai et Q vrai.

On dit qu'en mathématiques, le $\boxed{\text{OU est inclusif}}$
A ne pas confondre avec "soit ... soit ... ". En effet, par exemple, la proposition "soit fromage soit dessert" exclut le cas où on peut avoir les deux à la fois (P vrai et Q vrai): on dit dans ce cas que le OU est exclusif.
L'expression "fromage ou dessert" est donc à méditer...

2.2 Négation d'une proposition

Définition. Soit P une proposition. On définit la négation de P, notée non P, qui est vraie quand P est fausse, fausse quand P est vraie.

Exemple: P: "$1 + 1 = 3$", non P: "$1 + 1 \neq 3$". Q: "$x < 2$", non Q: "$x \geqslant 2$" (**inégalité stricte devient large!**)
Remarque: non (non P)=P.

2.2.1 Négation d'une proposition avec quantificateurs

Exemple: Nions la proposition P: "Tout homme est mortel".
Le contraire de P veut dire qu'on peut trouver un homme qui ne soit pas mortel, soit non P: "il existe un homme immortel".
Exemple: Nions la proposition P: "certains jours, il pleut". La négation est donc: "il ne pleut jamais" ou plus précisément "tous les jours, il ne pleut pas".

Capacité exigible: savoir nier une proposition avec quantificateurs.

- chaque quantificateur $\forall$ est remplacé par un quantificateur $\exists$, et de même, chaque quantificateur $\exists$ est remplacé par un quantificateur $\forall$
- on nie la proposition finale.

Autrement dit: Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'une variable $x \in E$.

La négation de "$\forall x \in E,\ P(x)$" est "$\exists\, x \in E$, non $P(x)$".
La négation de "$\exists\, x \in E,\ P(x)$" est "$\forall x \in E$, non $P(x)$".

Exemples:

- P: "$\forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant 10$"; non P: "$\exists x \in \mathbb{R}, x > 10$".
- Q: "$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est nulle" , qui s'écrit: "$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$".
  Donc non Q: "$\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$".

2.2.2 Négation des connecteurs logiques

La négation de P OU Q est non P ET non Q, ainsi:

non (P OU Q) a le même sens que (non P) ET (non Q)

Exemples: Nions les propositions du paragraphe 2.1

- Q: "$x \geqslant 1$ **ou** $x < -2$"; non Q: "$x < 1$ **et** $x \geqslant -2$", qui s'écrit "$-2 \leqslant x < 1$".
- "Nicolas est malheureux ou triste"; négation: "Nicolas est heureux et joyeux".

La négation de P ET Q est non P OU non Q, donc:

non (P ET Q) a le même sens que (non P) OU (non Q)

Exemples:

- P: "Ce cours est long et difficile" ; non P: "Ce cours est court ou facile".
- Q: "$-1 < x \leqslant 1$" s'écrit aussi "$-1 < x$ **et** $x \leqslant 1$", donc la négation est non Q: "$x \leqslant -1$ **ou** $x > 1$".

Capacité exigible: savoir nier une proposition avec connecteurs logiques:

On nie chaque proposition.
On remplace chaque ET par OU, et de même, on remplace chaque OU par ET.

2.3 Implication, Equivalence

2.3.1 Implication

Définition. Soient P et Q deux propositions. On définit la proposition P implique Q, notée $P \Rightarrow Q$, qui signifie: "**si** P est vraie **alors** Q est vraie".

Remarque: La proposition $P \Rightarrow Q$ ne dit pas que P est vraie, mais elle dit:

- SI P est vraie, ALORS Q est vraie aussi: $P \Rightarrow Q$ ne laisse aucun choix pour Q: Q est forcément vraie.
- Si la proposition P est fausse, on ne peut rien dire sur Q!! La proposition Q peut être vraie ou fausse, on ne sait pas.

En d'autres termes, l'implication $P \Rightarrow Q$ signifie: SOIT P est fausse, SOIT P et Q sont vraies donc $P \Rightarrow Q$ s'écrit (non P) OU Q.
Exemples:

- "Si un nombre entier est divisible par 2, alors il est pair", qui s'écrit encore "tout entier divisible par 2 est pair".
- "$x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$".

Vocabulaire: L'implication $P \Rightarrow Q$ se lit aussi de la façon suivante:

- Il *suffit* que P soit vraie pour que Q le soit. On dit que P est une **condition suffisante** pour que Q soit vraie.
- Il *faut* que Q soit vraie pour que P le soit. On dit que Q est une **condition nécessaire** pour que P soit vraie.

Proposition: Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ alors $P \Rightarrow R$. (transitif)

2.3.2 Contraposée et Négation

Définition. Soient P et Q deux propositions. La **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition non $Q \Rightarrow$ non P.

Exemples:

- P_1: "$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$". La contraposée de P_1 est: "$x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$".
- P_2: "$x \geqslant -2 \Rightarrow x^2 + 2x \geqslant 0$". La contraposée de P_2 est: "$x^2 + 2x < 0 \Rightarrow x < -2$".
- Q: "S'il pleut alors je reste à la maison": il suffit qu'il pleuve pour que je reste à la maison.
  La contraposée de Q est "Si je ne reste pas à la maison alors il ne pleut pas": pour que je sorte de la maison, il faut qu'il ne pleuve pas.

On remarque que P_1 et sa contraposée sont vraies, et P_2 et sa contraposée sont fausses: une implication et sa contraposée sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

Capacité exigible: savoir nier une implication. la négation de $P \Rightarrow Q$ est P ET (non Q)

L'implication $\Rightarrow$ devient ET On garde la condition suffisante P On nie la condition nécessaire Q

Remarques:
• non ($P \Rightarrow Q$) se rédige souvent: P est vraie MAIS Q est fausse.
• La négation d'une implication n'est pas une implication!

Exemples:

- P: "$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$" ; non P: "$x = 1$ et $x^2 \neq 1$".
- Q: "S'il pleut alors je reste à la maison" ; non Q: "il pleut mais je ne reste pas à la maison".

Exercice 3 Donner la négation de la contraposée de $P \Rightarrow Q$.

Remarque: que pensez-vous de la contraposée de la négation d'une implication?

2.3.3 Equivalence (CNS)

Définition. Soient P et Q deux propositions. L'implication **réciproque** de $P \Rightarrow Q$ est la proposition $Q \Rightarrow P$.

ATTENTION!
Même si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, sa réciproque ne l'est pas toujours!!
Exemple: L'implication "$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$" est vraie tandis que son implication réciproque "$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$" est fausse ...
Par contre, quand elles sont vraies ou fausses simultanément, on parle de propositions *équivalentes.*

Définition. Soient P et Q deux propositions. On définit la proposition $P \iff Q$ qui signifie:
$P \Rightarrow Q$ ET $Q \Rightarrow P$.

Vocabulaire: L'équivalence $P \iff Q$ se lit de la façon suivante:

- Pour que P soit vraie, **il faut et il suffit** que Q le soit.
- P est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS).
- P est vraie **si et seulement si** Q est vraie.

Dans l'équivalence $P \iff Q$, P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

Exemples:

- Une implication et sa contraposée sont équivalentes.
- "un triangle est équilatéral" est équivalent à "un triangle a tous ses angles égaux à 60 degrés".
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 = 1 \iff n = 1$ est vraie, MAIS $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 1 \iff (x = -1$ OU $x = 1)$.
- $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

3 Raisonnements dans les démonstrations

Comment réinvestir toutes les notions précédentes dans une démonstration?
Cette partie a pour but d'aider à avoir un plan de démonstration: comment s'y prendre à partir des hypothèses (objets donnés dans l'énoncé) pour aboutir à un but (propriété à établir). Toutes les démonstrations ne se réduisent pas à des automatismes, mais les éléments de logique pratique de cette partie doivent aider à organiser une démonstration.

Citation du programme officiel: $\boxed{\text{Compétence "raisonner et argumenter"}}$
Cela consiste à effectuer des inférences (inductives et déductives), à conduire une démonstration, à confirmer ou infirmer une conjecture, et enfin à évaluer la pertinence d'un concept au regard du problème posé.

Capacité exigible: utilisation d'un contre-exemple.
Plus précisément, montrer une propriété signifie montrer qu'elle est *vraie*. Si on veut montrer que "$\forall x \in E$, $P(x)$" est fausse, on montrera que $P(x)$ est fausse pour une certaine valeur de $x \in E$: on parle de **contre-exemple**.
Considérons par exemple, la propriété P: "Tout réel qui est un carré est strictement négatif".
P est clairement fausse; pour le montrer, il suffit de trouver un carré qui n'est pas strictement négatif (i.e strictement positif).
contre-exemple: le réel 4 est un carré ($4 = 2^2$) positif. Donc P est fausse.

exemple fondamental: étude d'une réciproque.
Pour une implication $P \Rightarrow Q$, on s'intéresse à sa réciproque $Q \Rightarrow P$: est-elle vraie ou fausse?
Montrer que $Q \Rightarrow P$ est fausse revient à montrer que sa négation Q et non P est vraie, en utilisant un contre-exemple.
exemple: Considérons la proposition "$\forall x \in \mathbb{R}$, $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$".
Etudions la réciproque "$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$". Est-elle vraie ?

3.1 Démonstrations et quantificateurs

3.1.1 Quantificateur universel

$*$ Pour **DÉMONTRER** une propriété universelle (du type $\forall x \in E, P(x)$), on prend un x **quelconque** dans E et on montre que $P(x)$ est vraie. Pour la rédaction, on peut écrire "Soit $x \in E$ quelconque, montrons que $P(x)$ est vraie".
Exemple: Montrer que " Tout réel qui est un carré est positif "
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exists\, y \in \mathbb{R}, x = y^2 \geqslant 0$.
ATTENTION A L'ERREUR CLASSIQUE: NE PAS PRENDRE UN x PARTICULIER!!!
$x = 4 = 2^2 \geqslant 0$ ne suffit pas!

$*$ Pour **UTILISER** une propriété (hypothèse) universelle (du type $\forall x \in E, P(x)$), on **fixe** un x **particulier** (quelquefois plusieurs) qui nous arrange, et on utilise la propriété $P(x)$.
MÉTHODE À RETENIR: il y a deux façons de "fixer" en mathématiques:

$*$ On sait que: $\forall \varepsilon > 0, \exists\, n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. (car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$)
On peut prendre **une valeur particulière de ε:** en particulier, $\varepsilon = 1 > 0$ convient.

$*$ On sait que: $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-n} \leqslant M$.(car la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$)
On peut faire un **passage à la limite**: n vers $+\infty$ (M ne dépend pas de n!).

3.1.2 Quantificateur existentiel

$*$ Pour **DÉMONTRER** une propriété existentielle (du type $\exists x \in E, P(x)$), on **construit** un x et on démontre que pour cet x la propriété $P(x)$ est vraie. C'est souvent difficile, car il faut en général avoir de l'"intuition".
Il s'agit de la méthode d'**analyse-synthèse**:

Exemple: Montrons que $\forall y \neq \dfrac{1}{2}, \exists x \neq \dfrac{1}{2}, \dfrac{x+1}{2x-1} = y$.

Soit $y \neq \dfrac{1}{2}$ quelconque.

- Analyse: supposons que x existe. (x dépend donc de .... ?). Donc $\dfrac{x+1}{2x-1} = y$,

$x + 1 = y\,(2x - 1)$

$\vdots$

$x\,(1 - 2y) = -y - 1$ donc $x = \ldots$?

- Synthèse: réciproquement, soit $x = \ldots$ (le candidat obtenu en analyse).

Montrons que $x \neq \frac{1}{2}$ et que $\frac{x+1}{2x-1} = y$.

$*$ Pour **UTILISER** une propriété (hypothèse) existentielle (du type $\exists x \in E, P(x)$), on prend un x ayant la propriété $P(x)$. Pour la rédaction, on peut écrire "Soit x tel que $P(x)$" et on utilise la propriété $P(x)$.
ATTENTION!!! On ne connaît pas x: on sait juste qu'il existe (et qu'il n'est pas forcément unique!)...

3.2 Implication, Equivalence

$*$ **Capacité exigible: savoir DÉMONTRER une implication $P \Rightarrow Q$.** On distingue plusieurs raisonnements:

- **Raisonnement direct:** on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie. Pour la rédaction, on peut écrire "Supposons que P est vraie. Montrons Q".

- **Raisonnement par contraposée:** Il est parfois plus facile de démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$ en passant par sa contraposée, c'est-à-dire en montrant que non $Q \Rightarrow$ non P.
  On suppose donc que Q est fausse et on montre que P est fausse.
  Rappelons qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes, ce raisonnement est donc tout à fait rigoureux.
  Exemple: Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.
  Par contraposée: supposons que n est impair. Il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.
  Alors $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2q + 1$, où $q =$ $\in \mathbb{N}$. Donc n est impair.
  L'implication est donc montrée.

  Exercice 4 Soit la fonction f définie par: $f(x) = ax + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si f a un signe constant sur $\mathbb{R}$ alors $a = 0$.

- **Raisonnement par l'aburde:**
  Pour montrer qu'une propriété P est vraie, ce raisonnement consiste à supposer que P est fausse (ou non P vraie) et à aboutir à une *contradiction* ou *absurdité*. Ce qui signifie que l'hypothèse de départ (P fausse) est fausse, et puisqu'en mathématiques, une proposition n'a que deux valeurs, on en conclut que P est vraie.
  Pour la rédaction, on peut annoncer que l'on va raisonner par l'absurde en écrivant par exemple "Raisonnons par l'absurde:". Puis on commence le raisonnement par "Supposons que non P est vraie (c'est-à-dire P fausse)". On utilise ensuite cette nouvelle hypothèse pour aboutir à une absurdité, puis on conclut: "Conclusion: P est vraie".
  Reprise de l'exercice précédent: Montrer que si f a un signe constant sur $\mathbb{R}$ alors $a = 0$.
  Supposons f de signe constant sur $\mathbb{R}$. (on doit donc montrer que $a = 0$)
  Par l'absurde: si $a \neq 0$, alors:
  $*$ pour $x = \frac{2}{a}$, $f(x) = 3 > 0$,
  $*$ pour $x = -\frac{2}{a}$, $f(x) = -1 < 0$.
  Avez-vous repéré l'absurdité? Concluez.

Exemple: Montrer que la fonction exponentielle n'est pas paire.
Si elle l'était alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = e^{-x}$, et donc en particulier pour $x = 1$:
$e = \frac{1}{e} \iff e^2 = 1 \iff e = 1$ (car $e > 0$): ABSURDE.
Conclusion: la fonction exponentielle n'est pas paire.

Remarque: Ce raisonnement est difficile à mettre en place, car on ne connaît pas l'absurdité (à laquelle on veut aboutir) à l'avance. On avance donc dans la démonstration sans savoir vraiment où l'on va ... Il ne faut donc pas abuser des démonstrations par l'absurde, et toujours privilégier une démonstration directe et naturelle.

$*$ Pour **UTILISER** une hypothèse du type $P \Rightarrow Q$, on démontre que P est vraie et on en déduit que la propriété Q est vraie aussi.
Rappel: si la propriété P est fausse, on ne peut rien dire sur Q.

Capacité exigible: savoir démontrer une équivalence $P \iff Q$.
Le mieux est de remplacer $P \iff Q$ par la double implication $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Exemple: Montrons que la fonction $f : x \mapsto ax + 1$ a un signe constant sur $\mathbb{R}$ ssi $a = 0$.

- $\boxed{\Rightarrow}$ déjà traitée
- $\boxed{\Leftarrow}$ Claire...

Remarque: il y a très souvent une implication évidente, pensez-y!