Raisonnement par récurrence

I. Sur une génération.

Exercice 1 Soit $a \geqslant 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + n\,a$.

Exercice 2 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 1 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

Exercice 3 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n}\,u_n$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{3^n}$

Exercice 4 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,u_n - \dfrac{2n+3}{2} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^n} - 2n + 1$.

Exercice 5 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$$

Pour tout entier naturel n, déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 6 Soit la suite u définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{3\,u_n - 1}{2} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.

Exercice 7 Soit la suite u définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = e^{u_n - 1} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Exercice 8 Soient $a \geqslant 0$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant a\,u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant a^n\,u_0$.

Exercice 9 Montrer que : $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

II. Sur deux générations.

Exercice 10 Considérons la suite u définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 8 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = 4\,(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n\,(3n+1)$.

Exercice 11 Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 4a_n}{3a_{n+1} + 2a_n}\,.$$

Montrer que pour tout entier n, $a_n = 1$.

Exercice 12 Soit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par: $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Montrer que: $\forall n \geqslant 1$, $F_n \leqslant \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$.