

Raisonnement par récurrence

I. Sur une génération.

Exercice 1 Soit $a \geq 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Exercice 2 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - n + 1$$

Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.

Exercice 3 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_1 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n}{3^n}$

Exercice 4 Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - \frac{2n+3}{2} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$.

Exercice 5 Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$$

Pour tout entier naturel n , déterminer une expression de u_n en fonction de n .

Exercice 6 Soit la suite u définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

Exercice 7 Soit la suite u définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n - 1} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 8 Soient $a \geq 0$ et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq a u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a^n u_0$.

II. Sur deux générations.

Exercice 9 Considérons la suite u définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 8 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n(3n+1)$.

Exercice 10 Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 4a_n}{3a_{n+1} + 2a_n}.$$

Montrer que pour tout entier n , $a_n = 1$.

Exercice 11 Soit la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par: $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Montrer que: $\forall n \geq 1, F_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$.