

## Manipulation d'expressions algébriques

### I. Fractions.

**Exercice 1** Calculer (on donnera le résultat sous forme de fraction irréductible):

$$1. \frac{2}{2+3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{\frac{5}{3}} + \frac{1}{\frac{4}{6}} =$$

$$2. \frac{4 \times 6 \times 9}{5 \times 8 \times 3} = \frac{\frac{2}{3}}{8} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{7}{3}} =$$

$$3. 5 \times \frac{2+3}{20} = \frac{3 \times 4 + 3 \times 7}{24} =$$

**Exercice 2** Écrire sous forme de fraction irréductible :

$$A = \frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \times 5}{1 - \frac{1}{2} + \frac{5}{3}}$$

**Exercice 3** Simplifier les expressions suivantes (on n'étudiera pas les conditions d'existence):

$$1. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \qquad 2. \frac{1}{1 - \frac{1}{2+x}}$$

**Exercice 4** Mettre sous la forme d'un quotient :

$$1. \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+2} \qquad 4. \frac{2x-3}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{2x^2}{x^2-1}$$

$$2. \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x+2}$$

$$3. \frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{y}{x-y} + \frac{x}{x+y}} \qquad 5. \frac{1}{x - \frac{1}{3 + \frac{x-2}{5-x}}}$$

### II. Puissances.

**Exercice 5** Écrire à l'aide des puissances de 2 et 3 les nombres  $6^5$  et  $36^3$ .

**Exercice 6** Simplifier :

$$1. 8^3 \times \frac{1}{4^2} \qquad 2. \frac{(4 \times 3)^{10} + 4^9}{8^4} \qquad 3. \frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$$

**Exercice 7** Soient  $a$  et  $b$  deux réels non nuls. Simplifier les expressions suivantes:

$$1. \frac{a^{-4} b^3 a^3}{(ab^2)^{-2}} \qquad 2. \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-4} \times \left(\frac{b^2}{a^3}\right)^{-3}$$

### III. Identités remarquables.

**Exercice 8** Compléter:

$$1. (x^2 + 1)^2 = \dots + \dots + \dots \qquad 3. (\dots - 5)(\dots + \dots) = x^6 - \dots$$

$$2. x^2 - 6x + \dots = (x - \dots)^2 \qquad 4. (a + b)^2 (a^2 - b^2) = (a - b) \times \dots$$

**Exercice 9** Développer et réduire l'expression l'expression suivante :

$$A = (3 - 4x)^2 + 7(2x + 5)^2 - 2(6x - 1)(6x + 1)$$

**Exercice 10** Factoriser les expressions suivantes:

1.  $(2-x)^2 - (3+2x)^2$
2.  $x^4 - 18x^2 + 81$
3.  $-x^2 + 2x - 1$
4.  $2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$
5.  $x^3 - 2x^2 + 2(4-x^2)$
6.  $x^4 - (x-1)^4$
7.  $(x-2) \left(x + \frac{3}{2}\right) + (2x+3)(x^2 - 4x + 4)$

#### IV. Manipulation de la racine carrée.

**Exercice 11** Calculer :

1.  $\sqrt{(-5)^2}$
2.  $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$
3.  $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$
4.  $\sqrt{(\sqrt{3}-a)^2}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 12** Calculer :

1.  $(2\sqrt{5})^2$
2.  $(2 + \sqrt{5})^2$
3.  $(\sqrt{2}\sqrt{3})^4$

**Exercice 13** Calculer :

1.  $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$
2.  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$
3.  $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$
4.  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
5.  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
6.  $\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2$

**Exercice 14** Calculer :

1.  $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$
2.  $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
3.  $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$

**Exercice 15** Calculer :

1.  $\frac{\sqrt{20}-3\sqrt{5}}{\sqrt{8}\sqrt{10}-5}$
2.  $(\sqrt{2^3 \times 9})^{-1} \times \sqrt{\frac{81 \times 2^5}{100}}$

**Exercice 16** Mettre sous la forme  $x + y\sqrt{3}$ :

$$2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}$$

**Exercice 17** Pour tout réel  $x > 0$ , simplifier:

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \quad \frac{\sqrt{x}}{x} \quad \frac{x^2}{x\sqrt{x}} \quad \frac{x^3\sqrt{x}}{x^5} \quad \frac{\sqrt{2x}}{x + \sqrt{x}}$$

#### V. Recherche de signe.

Signe de  $ax + b$  ( $a \neq 0$ )

- Si  $a > 0$ :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	$0$	$+$
		$\underbrace{\quad\quad}_+$	
		signe de $a$	

- Si  $a < 0$ :

$$\begin{array}{c|cccc}
 x & -\infty & & -\frac{b}{a} & +\infty \\
 \hline
 ax + b & & + & 0 & \\
 & & & \underbrace{\quad\quad}_\text{signe de } a & 
 \end{array}$$

**ATTENTION:** un tableau de signes donne le signe d'un **PRODUIT** et non d'une **SOMME!!!** Il faut donc penser à **FACTORISER AVANT** de faire un tableau de signes.

**Exercice 18** Donner le signe de:

$$\begin{array}{lll}
 1. (x+2)(3x-1) & 2. (x^2-3x+2)^2 - (x^2+5x-2)^2 & 3. \frac{(3-2x)^2(x-5)}{(7x-1)(x-1)^5}
 \end{array}$$

**Exercice 19** Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 1. 3x+2 \geq -1 & 3. (x+2)(3x-1) < 0 \\
 2. x+1 \geq -3x+2 & 4. (x^2-3x+2)^2 - (x^2+5x-2)^2 \leq 0
 \end{array}$$

**Exercice 20** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $\frac{x}{1+\frac{1}{x}} < 3$ .

## VI. Encadrements.

Règles à respecter pour encadrer :

deux opérations algébriques (addition et multiplication) et pas d'autres !  
Monotonie d'une fonction.

1. **ADDITION** : rien à vérifier. On peut toujours additionner des encadrements.

2. **PRODUIT** : attention au signe !!

3. **MONOTONIE** d'une fonction : monotonie - **INTERVALLE** - antécédents **DEDANS**

Soient deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $1 < a < 2$  et  $-5 < b < -3$ .

**Exercice 21** Encadrer :

$$\begin{array}{ll}
 1. a+b & 4. 3b-2a \\
 2. 3a+2b & 5. ab \\
 3. a-b & 6. a(1-a)
 \end{array}$$

**Exercice 22** Encadrer :

$$\begin{array}{lll}
 1. a^2 & 4. \frac{1}{a} & 6. b^2 \\
 2. \sqrt{a} & & 7. \frac{1}{b} \\
 3. \sqrt{a-1} & 5. \sqrt{\frac{1}{a}} & 8. \frac{a}{b}
 \end{array}$$