

Manipulation d'expressions algébriques

I. Fractions.

Exercice 1 Calculer (on donnera le résultat sous forme de fraction irréductible):

$$1. \frac{2}{2+3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{\frac{5}{3}} + \frac{1}{\frac{4}{6}} =$$

$$2. \frac{4 \times 6 \times 9}{5 \times 8 \times 3} = \frac{\frac{2}{3}}{8} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{7}{3}} =$$

$$3. 5 \times \frac{2+3}{20} = \frac{3 \times 4 + 3 \times 7}{24} =$$

Exercice 2 Écrire sous forme de fraction irréductible :

$$A = \frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \times 5}{1 - \frac{1}{2} + \frac{5}{3}}$$

Exercice 3 Simplifier les expressions suivantes (on n'étudiera pas les conditions d'existence):

$$1. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \qquad 2. \frac{1}{1 - \frac{1}{2+x}}$$

Exercice 4 Mettre sous la forme d'un quotient :

$$1. \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+2} \qquad 4. \frac{2x-3}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{2x^2}{x^2-1}$$

$$2. \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x+2}$$

$$3. \frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{y}{x-y} + \frac{x}{x+y}} \qquad 5. \frac{1}{x - \frac{1}{3 + \frac{x-2}{5-x}}}$$

II. Puissances.

Exercice 5 Écrire à l'aide des puissances de 2 et 3 les nombres 6^5 et 36^3 .

Exercice 6 Simplifier :

$$1. 8^3 \times \frac{1}{4^2} \qquad 2. \frac{(4 \times 3)^{10} + 4^9}{8^4} \qquad 3. \frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$$

Exercice 7 Soient a et b deux réels non nuls. Simplifier les expressions suivantes:

$$1. \frac{a^{-4} b^3 a^3}{(ab^2)^{-2}} \qquad 2. \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-4} \times \left(\frac{b^2}{a^3}\right)^{-3}$$

III. Identités remarquables.

Exercice 8 Compléter:

$$1. (x^2 + 1)^2 = \dots + \dots + \dots \qquad 3. (\dots - 5)(\dots + \dots) = x^6 - \dots$$

$$2. x^2 - 6x + \dots = (x - \dots)^2 \qquad 4. (a + b)^2 (a^2 - b^2) = (a - b) \times \dots$$

Exercice 9 Développer et réduire l'expression l'expression suivante :

$$A = (3 - 4x)^2 + 7(2x + 5)^2 - 2(6x - 1)(6x + 1)$$

Exercice 10 Factoriser les expressions suivantes:

1. $(2-x)^2 - (3+2x)^2$

2. $x^4 - 18x^2 + 81$

3. $-x^2 + 2x - 1$

4. $2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$

5. $x^3 - 2x^2 + 2(4-x^2)$

6. $x^4 - (x-1)^4$

7. $(x-2) \left(x + \frac{3}{2}\right) + (2x+3)(x^2 - 4x + 4)$

IV. Manipulation de la racine carrée.

Exercice 11 Calculer :

1. $\sqrt{(-5)^2}$

2. $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$

3. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

4. $\sqrt{(\sqrt{3}-a)^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 Calculer :

1. $(2\sqrt{5})^2$

2. $(2 + \sqrt{5})^2$

3. $(\sqrt{2}\sqrt{3})^4$

Exercice 13 Calculer :

1. $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

2. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

3. $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

4. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

5. $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

6. $\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2$

Exercice 14 Calculer :

1. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

2. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$

Exercice 15 Calculer :

1. $\frac{\sqrt{20}-3\sqrt{5}}{\sqrt{8}\sqrt{10}-5}$

2. $(\sqrt{2^3 \times 9})^{-1} \times \sqrt{\frac{81 \times 2^5}{100}}$

Exercice 16 Mettre sous la forme $x + y\sqrt{3}$:

$$2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}$$

Exercice 17 Pour tout réel $x > 0$, simplifier:

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \quad \frac{\sqrt{x}}{x} \quad \frac{x^2}{x\sqrt{x}} \quad \frac{x^3\sqrt{x}}{x^5} \quad \frac{\sqrt{2x}}{x + \sqrt{x}}$$

V. Recherche de signe.

Signe de $ax + b$ ($a \neq 0$)

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	0	$+$
		$\underbrace{\quad\quad\quad}_+$	
		signe de a	

- Si $a < 0$:

$$\begin{array}{c|cccc}
 x & -\infty & & -\frac{b}{a} & +\infty \\
 \hline
 ax + b & & + & 0 & \\
 & & & \underbrace{-}_{\text{signe de } a} &
 \end{array}$$

ATTENTION: un tableau de signes donne le signe d'un **PRODUIT** et non d'une **SOMME!!!** Il faut donc penser à **FACTORISER AVANT** de faire un tableau de signes.

Exercice 18 Donner le signe de:

$$\begin{array}{lll}
 1. (x+2)(3x-1) & 2. (x^2-3x+2)^2 - (x^2+5x-2)^2 & 3. \frac{(3-2x)^2(x-5)}{(7x-1)(x-1)^5}
 \end{array}$$

Exercice 19 Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 1. 3x+2 \geq -1 & 3. (x+2)(3x-1) < 0 \\
 2. x+1 \geq -3x+2 & 4. (x^2-3x+2)^2 - (x^2+5x-2)^2 \leq 0
 \end{array}$$

Exercice 20 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\frac{x}{1+\frac{1}{x}} < 3$.

VI. Encadrements.

Règles à respecter pour encadrer :

deux opérations algébriques (addition et multiplication) et pas d'autres !
Monotonie d'une fonction.

1. **ADDITION** : rien à vérifier. On peut toujours additionner des encadrements.

2. **PRODUIT** : attention au signe !!

3. **MONOTONIE** d'une fonction : monotonie - **INTERVALLE** - antécédents **DEDANS**

Soient deux réels a et b tels que : $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$.

Exercice 21 Encadrer :

$$\begin{array}{ll}
 1. a+b & 4. 3b-2a \\
 2. 3a+2b & 5. ab \\
 3. a-b & 6. a(1-a)
 \end{array}$$

Exercice 22 Encadrer :

$$\begin{array}{lll}
 1. a^2 & 4. \frac{1}{a} & 6. b^2 \\
 2. \sqrt{a} & & 7. \frac{1}{b} \\
 3. \sqrt{a-1} & 5. \sqrt{\frac{1}{a}} & 8. \frac{a}{b}
 \end{array}$$