Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Madame MOREL

Valeur absolue

1 Définition et règles de clalcul

1.1 Fonction Valeur Absolue

Définition 1 *Pour tout réel x, on définit sa* **valeur absolue**, *notée $|x|$ par:*

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| = \left| \begin{array}{cl} x & si\ x \geqslant 0\,, \\ -x & si\ x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Proposition 1 :
(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant 0$
(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant x$
(3) $\forall x \in \mathbb{R},\ |x|^2 = x^2$ (passer au carré enlève les valeurs absolues ... à retenir !)
(4) ATTENTION! $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|}$

Preuve:

■

2 Règles de calcul

Proposition 2 Pour tous réels x et y,
(1) $|x\,y| = |x|\,|y|$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |x^n| = |x|^n$. (récurrence)
(2) Si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
(3) *Inégalités triangulaires:*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \qquad \text{et} \qquad |x-y| \geqslant ||x| - |y||\ .$$

Preuve:

$\blacksquare$

Remarque 1 La preuve montre qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ssi x et y ont le même signe. En effet :

3 Résolution d'équations - inéquations

Lecture graphique 1 :

Proposition 3 (Propriétés lisibles sur le graphe):
(1) $\forall a \geqslant 0$, $|x| = a \iff x = -a$ ou $x = a$
(2)$\forall a \geqslant 0$, $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$ et $\forall a \geqslant 0$, $|x| \geqslant a \iff (x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a)$

Preuve:

$\blacksquare$

Capacité exigible 1 : résolution d'équations et d'inéquations avec valeurs absolues.
La valeur absolue est une "écriture condensée". Dans les exercices, en général, on "casse" la valeur absolue pour pouvoir

travailler, ce qui donne donc deux équations ou inéquations à résoudre (au lieu d'une) d'après les propriétés précédentes.
ATTENTION! $\forall a < 0$, l'équation $|x| = a$ n' a aucune solution!

Remarque 2 Une autre technique pour enlever des valeurs absolues est le passage au carré (puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 = x^2$), mais attention aux équivalences !!
Cette méthode a été vue dans la preuve des inégalités triangulaires.

Remarque 3 $|x| = 0 \iff x = 0$

Exemple 1 :
(1) $|5x - 1| = 7$

(2) $|x + 3| \leqslant 5$

4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 2 *On appelle* **intervalle** *toute partie de* $\mathbb{R}$ *de la forme: soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tq* $a \leqslant b$*,*

$$\begin{array}{rlrl} (1) & [a,b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leqslant x \leqslant b\} & (2) & [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}/x \geqslant a\} \\ &]a,b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leqslant b\} & &]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}/x > a\} \\ & [a,b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leqslant x < b\} & &]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}/x \leqslant b\} \\ &]a,b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\} & &]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R}/x < b\} \\ & & &]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}\,! \end{array}$$

Remarque 4 :
(1) $[a, a] = \{a\}$ est appelé **singleton**. (intervalle réduit à un seul élément)
(2) $]a, a[= \emptyset$ donc l'ensemble vide est un intervalle!
(3) Les intervalles de la forme $[a, b]$ sont appelés **segments**.

Remarque 5 La valeur absolue s'interprète naturellement en terme de distance (longueur d'intervalle) :
$|x|$ est la distance entre 0 et x (indépendamment de la position relative entre 0 et x).
Plus généralement, si x et y sont deux réels, $|x - y|$ peut être interprétée comme la distance de x à y.

Proposition 4 Soit r un réel positif, c un réel. Pour tout réel x, on a :

$$|x - c| \leqslant r \iff -r + c \leqslant x \leqslant r + c \iff x \in [c - r, c + r]$$
$$|x - c| < r \iff -r + c < x < r + c \iff x \in]c - r, c + r[$$

Preuve:

■

Proposition 5 Pour tout x, y et z trois réels quelconques,

$$|x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|.$$

Preuve:

■

Remarque 6 Il est plus rapide d'aller d'un point x à un point z en ligne droite, plutôt qu'en faisant un détour par y...

5 Langage `PYTHON`

Pour coder la fonction valeur absolue, on utilise la fonction `abs()` qui se situe dans la bibliothèque `math` (et aussi `numpy`)

Exercice 1 Écrire une fonction `valabs(x)`, qui pour tout réel x renvoie la valeur de sa valeur absolue.
sans utiliser la fonction `abs()`

Exercice 2 :

1. Montrer que: pour tous réels x et y,

$$\max(x,y) = \frac{(x+y)+|x-y|}{2} \text{ et } \min(x,y) = \frac{(x+y)-|x-y|}{2}.$$

2. Écrire deux fonctions qui calculent le maximum et le minimum de deux réels quelconques.
sans utiliser les fonctions `max()` et `min()`