Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Madame MOREL

Sommes et Produits

1 Sommes

1.1 Signe $\sum$

Définition 1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, on note la somme des nombres $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$ par:*

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n\,.$$

La notation $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k$ se lit "somme des u_k", k allant de m à n (ou: pour k compris entre m et n).
u_k s'appelle le terme général (de la somme) et k l'indice (de sommation).

Exemple 1 $1 + 2 + \ldots + n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k$.

Remarque 1 :

• Dans la notation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, k est un indice **muet**, au sens où on peut le remplacer par un autre symbole:
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=0}^{n} u_j = \sum_{l=0}^{n} u_l$.

Par contre, ATTENTION! n est fixé, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{n} u_n$ n'a aucun sens.

• Par convention, si $n < m$, alors $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = 0$. Par exemple, $\displaystyle\sum_{k=2}^{1} u_k = 0$.

• On note aussi $\displaystyle\sum_{m\leqslant k\leqslant n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_k$.

Exemple 2 Ecrire les nombres suivants SANS le symbole $\sum$ (on ne demande pas de les calculer, sauf pour (4)):

(1) $\displaystyle\sum_{j=2}^{4} \frac{j^2}{3^j} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} (2k-a)^k =$

(2) **Indices pairs et impairs:**

$\displaystyle\sum_{p=1}^{n} b_{2p} =$

$\displaystyle\sum_{p=0}^{n} b_{2p+1} =$

(3) **Alternance des signes:** $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^k}{k} =$

À retenir:

$$\boxed{\text{L'alternance des signes est donnée par } (-1)^k \text{ ou } (-1)^{k-1} = (-1)^{k+1} \text{ dans le terme général}}$$

Montrons que $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$:

ATTENTION! $(-1)^k \neq -1^k$...

(4) **Nombre de termes:** Calculer les sommes suivantes:

$\sum_{k=1}^{n} 1 =$

Pour tout λ réel ou complexe, $\sum_{k=0}^{n} \lambda =$

A retenir: pour tous entiers n, m, tels que $m \leqslant n$, pour tout réel ou complexe λ,

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} 1 = \text{nombre de termes} = n - m + 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=m}^{n} \lambda = \lambda \times \text{ nombre de termes} = \lambda \times (n - m + 1)}$$

Exemple 3 Écrire les sommes suivantes AVEC le symbole $\sum$ (on ne demande pas de les calculer):

$$S_1 = 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$$
$$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{10000}$$
$$S_3 = \ln 2 + \ln 4 + \ln 6 + \ldots + \ln 12$$
$$S_4 = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - 102 + 103$$

Exercice 1 (somme arithmétique)
En utilisant que $1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}\,.$$

1.2 Propriétés

Proposition 1 (linéarité du signe $\sum$): Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes.
Pour tout réel ou complexe λ, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a:

$$(1) \quad \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$
$$(2) \quad \sum_{k=m}^{n} (\lambda\, a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Remarque 2 (1) et (2) sont équivalentes à : $\boxed{\sum_{k=m}^{n} (\lambda\, a_k + b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k}$

Remarque 3 :
(1) provient de la commutativité et de l'associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais on retient plus souvent:

on peut "casser" le signe $\sum$.

ATTENTION! Cette formule est fausse dans le cas d'un produit:

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda_k\, a_k) \neq \left(\sum_{k=m}^{n} \lambda_k\right) \times \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right).$$

(2) provient de la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais on retient plus souvent:

on peut "sortir" du signe $\sum$ tout ce qui ne dépend pas de l'indice.

ATTENTION! Cette formule n'a aucun sens si on "sort" un nombre qui dépend de l'indice de sommation:

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda_k\, a_k) \neq \lambda_k \sum_{k=m}^{n} a_k\,.$$

Exercice 2 Calculer les sommes suivantes:

(1) $A = \sum_{i=1}^{40}(i+4)$ $\quad B = \sum_{i=1}^{40}(10i+4)$ $\quad C = \sum_{i=2}^{40}(10i+4)$ $\quad \sum_{i=10}^{n} i \ (n \geqslant 10)$.

(2) $D = \sum_{i=0}^{10}(2i-3)$.

(3) $E = \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{i} - \sum_{k=3}^{51} \frac{1}{k}$ $\quad F = \sum_{p=5}^{12} p^2 - \sum_{j=3}^{10} j^2$.

1.3 Sommes et récurrence

Méthode 1 Pour revenir au rang n dans la preuve de l'hérédité, on **isole le dernier terme**, i.e on écrit:

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}$$

Exemple 4 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Remarque 4 ATTENTION ! La propriété à démontrer pour tout entier naturel n non nul est :

$$P(n) \ : \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

k étant l'indice de sommation, $P(n)$ ne dépend pas de k !!

Proposition 2 :

(1) **Somme arithmétique:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}}$$

(2) **Somme géométrique:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\forall q \neq 1, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

(3) **Sommes d'Euler**: pour tout entier naturel n,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \text{ et } \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

Preuve :

$\blacksquare$

Remarque 5 Plus généralement: soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leqslant m$,

$$\boxed{\sum_{k=n}^{m} q^k = \left| \begin{array}{ll} \text{nb de termes} = m-n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{\text{1er terme} - \text{1er terme non écrit}}{1-\text{raison}} = \dfrac{q^n - q^{m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{array} \right.}$$

1.4 Réindiçage (décalage d'indice)

1.4.1 Changement d'indice

Principe: on renumérote les termes de la somme afin de simplifier son expression.

Exemple 5 Écrire sans le signe $\sum$: $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}(j-1)$. Que remarque-t-on?

(on a en fait effectué le changement d'indice $j' = j-1$)

Capacité exigible 1 : technique du réindiçage.

1. On pose le changement d'indice $k' = k - p \iff k = k' + p$ ou $k' = k + p \iff k = k' - p$.
ATTENTION! le nouvel indice k' doit rester un entier de $\mathbb{N}$...
2. On change l'indice de sommation dans le terme général ET les bornes.
C'est-à-dire:
• Le changement d'indice $k' = k - p$ entraîne:

$$\sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k'=m}^{n} a_{k'} = \sum_{k=m}^{n} a_k \, .$$

• De même, le changement d'indice $k' = k + p$ donne:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k'=m+p}^{n+p} a_{k'-p} = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} \, .$$

Exemple 6 :

$$\sum_{k=4}^{180} \frac{k}{k-3} \underset{(k'=k-3)}{=} \sum_{k'=1}^{177} \frac{k'+3}{k'} \underset{(\text{indice muet})}{=} \sum_{k=1}^{177} \frac{k+3}{k} \, .$$

Exercice 3 Calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} \frac{k^2-k-2}{k-2}$ en faisant le changement d'indice $k' = k - 2$.

1.4.2 Sommes télescopiques

On parle de somme télescopique lorsque le terme général est la différence entre deux termes consécutifs d'une suite, i.e de la forme $u_k - u_{k+1}$, $u_{k+1} - u_k$, $u_k - u_{k-1}$ ou $u_{k-1} - u_k$. Il y a alors une succession de simplifications.

Exemple 7 : Calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left[(k+1)^3 - k^3\right]$.
Donc, plus généralement,

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - \cancel{u_2} + \cancel{u_2} - \cancel{u_3} + \cancel{u_3} - \cancel{u_4} + \ldots - \cancel{u_n} + \cancel{u_n} - u_{n+1} = u_1 - u_{n+1} \, .$$

Capacité exigible 2 : Calcul des sommes telescopiques.
Les sommes télescopiques se traitent en trois étapes:

1. Casser la somme: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_{k+1}$.
2. réindicer $(k' = k + 1)$ une des deux sommes: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=2}^{n+1} u_k$.
3. isoler les termes: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=2}^{n+1} u_k = u_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k - u_{n+1} - \sum_{k=2}^{n} u_k = u_1 - u_{n+1}$.

Remarque 6 Il faut souvent penser à **faire apparaître** une somme télescopique !

Exercice 4 Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.

Proposition 3 (formule de Bernoulli): Soient $n \in \mathbb{N}$ et deux réels ou complexes a et b. Alors:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = (a-b) \left(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n\right) \, .$$

Remarque 7 :
(1) C'est une généralisation de l'égalité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
A retenir: $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \quad \text{et} \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)}$
(2) Pour retenir cette formule: la somme des puissances de a et b vaut toujours n et quand la puissance de a diminue, parallèment celle de b augmente (de 0 à n).

Preuve: (somme télescopique)

$\blacksquare$

2 Produits

2.1 Signe $\prod$

Définition 2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, on note le produit des nombres $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$ par:*

$$\prod_{k=m}^{n} u_k = u_m \times u_{m+1} \times \ldots \times u_n\,.$$

La notation $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} u_k$ se lit "produit des u_k", k allant de m à n (ou: pour k compris entre m et n).

Exemple 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'entier n **factorielle** par:

$$\prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=2}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n = n!\text{ , avec la convention } 0! = 1\,.$$

Remarque 8 :

• Dans la notation $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} u_k$, k est un indice **muet**, au sens où on peut le remplacer par un autre symbole:
$\displaystyle\prod_{k=m}^{n} u_k = \prod_{j=m}^{n} u_j = \prod_{l=m}^{n} u_l$.

Par contre, ATTENTION! n est fixé, donc $\displaystyle\prod_{n=0}^{n} u_n$ n'a aucun sens.

• On note aussi $\displaystyle\prod_{m\leqslant k\leqslant n} u_k = \prod_{k=m}^{n} u_k$.

• Par convention: $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} u_k = 1$ si $m > n$.

Exemple 9 Ecrire les nombres suivants SANS le symbole $\prod$:

(1) **Termes nuls !**

$\displaystyle\prod_{i=1}^{6}(i^2\,\ln i)$

(2) **Termes pairs et impairs et nombre factorielle:**

$\displaystyle\prod_{p=1}^{n} 2p =$

$\displaystyle\prod_{p=0}^{n-1}(2p+1) =$

(3) **Nombre de termes:** Calculer les sommes suivantes:

$$\prod_{k=1}^{n} 1 =$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \ \prod_{k=1}^{n} \lambda =$$

À retenir: pour tous entiers n, m, tels que $m \leqslant n$, pour tout réel ou complexe λ,

$$\boxed{\prod_{k=m}^{n} 1 = 1 \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^{n} \lambda = \lambda^{\text{nombre de termes}} = \lambda^{n-m+1}}$$

Exemple 10 Ecrire les produits suivants AVEC le symbole $\prod$ (on ne demande pas de les calculer):

$$P_1 = (x-a_1)^{\alpha_1}\,(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p} \qquad P_2 = e^{4+8+16+32}$$

2.2 Propriétés

Proposition 4 Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. Pour tout réel ou complexe λ, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a:

$$(1) \quad \prod_{k=m}^{n} (a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) \text{ et donc } \prod_{k=m}^{n} a_k^p = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^p \text{ pour tout entier } p \in \mathbb{N}$$

$$(2) \quad \prod_{k=m}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{\prod_{k=m}^{n} a_k}{\prod_{k=m}^{n} b_k} \quad (b_k \neq 0 \ \forall\, k \in [\![m, n]\!])$$

$$(3) \quad \prod_{k=m}^{n} (\lambda\, a_k) = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k$$

Remarque 9 :
(1) provient de la commutativité et de l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais on retient plus souvent:

on peut "casser" le signe $\prod$.

ATTENTION! Cette formule est fausse dans le cas d'une somme:

$$\prod_{k=m}^{n} (\lambda_k + a_k) \neq \prod_{k=m}^{n} \lambda_k + \prod_{k=m}^{n} a_k\,.$$

(3) est un cas particulier de (1) car $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \lambda$ ne dépend pas de l'indice de sommation.
ATTENTION! C'est une grosse différence avec le signe $\sum$: on "sort" ce qui ne dépend pas de l'indice MAIS en tenant compte du nombre de termes **dans la puissance**:

$$\prod_{k=m}^{n} (\lambda\, a_k) \neq \lambda \times \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right).$$

Exercice 5 Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k^2(k+1)$.

2.3 Lien entre somme et produit

On rappelle :
$\forall\, a, b \in]0, +\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Proposition 5 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (à termes strictement positifs dans le cas (1)). Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a:

$$(1) \quad \ln\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) = \sum_{k=m}^{n} \ln a_k \qquad (2) \quad \exp\left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) = \prod_{k=m}^{n} e^{a_k}$$

Exemple 11 Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{k/n}$ pour tout entier n non nul.

2.4 Réindiçage (décalage d'indice)

2.4.1 Changement d'indice

Principe: on renumérote les termes du produit afin de simplifier son expression.

Exemple 12 Écrire sans le signe $\prod$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+3)$. Que remarque-t-on?
(on a en fait effectué le changement d'indice $k'=k+3$)

Méthode 2 : technique du réindiçage.

1. On pose le changement d'indice $k'=k-p \iff k=k'+p$ ou $k'=k+p \iff k=k'-p$.

ATTENTION! le nouvel indice k' doit rester un entier de $\mathbb{N}$...

2. On change l'indice de sommation dans le terme général ET les bornes.

C'est-à-dire:
• Le changement d'indice $k'=k-p$ entraîne:

$$\prod_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \prod_{k'=m}^{n} a_{k'} = \prod_{k=m}^{n} a_k\,.$$

• De même, le changement d'indice $k'=k+p$ donne:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k'=m+p}^{n+p} a_{k'-p} = \prod_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}\,.$$

2.4.2 Produits télescopiques

On parle de produit télescopique lorsque le terme général est le quotient entre deux termes consécutifs d'une suite, i.e de la forme $\dfrac{u_k}{u_{k+1}}$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$, $\dfrac{u_{k-1}}{u_k}$ ou $\dfrac{u_k}{u_{k+1}}$. Il y a alors une succession de simplifications.

Exemple 13 : Calcul de $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}$.
Donc, plus généralement,

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{u_1}{\cancel{u_2}}\times\frac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_3}}\times\ldots\times\frac{\cancel{u_k}}{\cancel{u_{k+1}}}\times\ldots\times\frac{\cancel{u_n}}{u_{n+1}} = \frac{u_1}{u_{n+1}}\,.$$

Méthode 3 : Calcul des produits télescopiques.
Les sommes télescopiques se traitent en trois étapes:

1. Casser le produit: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n}u_k}{\prod_{k=1}^{n}u_{k+1}}$.

2. réindicer ($k'=k+1$) un des deux produits: $\displaystyle\frac{\prod_{k=1}^{n}u_k}{\prod_{k=1}^{n}u_{k+1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n}u_k}{\prod_{k=2}^{n+1}u_k}$.

3. isoler les termes: $\displaystyle\frac{\prod_{k=1}^{n}u_k}{\prod_{k=2}^{n+1}u_k} = \frac{u_1\times\prod_{k=2}^{n}u_k}{u_{n+1}\times\prod_{k=2}^{n}u_k} = \frac{u_1}{u_{n+1}}$.

Remarque 10 Il faut souvent penser à **faire apparaître** un produit télescopique !

Exemple 14 Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{\ln(k+1)}{\ln k}$.