Sommes et Produits

I. Sommes

a) Entraînement

Exercice 1 Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+n-1), \quad n \geqslant 1$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-4}{3}, \quad n \geqslant 3$

Exercice 2 Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1), \quad n \geqslant 1$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4k(k^2+2)$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k, \quad n \geqslant 3$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\, 5^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}$

Exercice 3 (sommation par paquets)
Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\, k, \quad n \geqslant 1$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n), \quad n \in \mathbb{N}$

b) Changement d'indice

Exercice 4 Calculer le sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) en utilisant le changement d'indice indiqué :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, 2^k, \quad j = k-1$
2. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3, \quad j = k-2$

c) Télescopage

Exercice 5 En remarquant que $\dfrac{1}{k\,(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k\,(k+1)}$.

Exercice 6 :

1. En remarquant que $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.
2. Trouver trois réels a, b, c tels que: $\dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1} + \dfrac{c}{k+1}$, $\forall k \geqslant 2$.

   En déduire la valeur de la somme: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$, pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exercice 7 $(*)$ Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, k!$

Exercice 8 $(*)$ Soit un réel a, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a^k$.

1. Calculer S_n lorsque $a = 1$.
2. Lorsque $a \neq 1$, calculer $a\, S_n - S_n$; en déduire la valeur de S_n.

II. Produits

Exercice 9 Calculer le produit : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k}\, k$

a) Manipulation de factorielles

Exercice 10 Simplifier les expressions ($n \in \mathbb{N}$) :

1. $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$
2. $\dfrac{(n+1)!}{2^{2\,(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$
3. $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2n\,(n+1)!} + \dfrac{1}{2\,(n+2)!}$

b) Télescopage

Exercice 11 Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 12 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer très simplement en fonction de n le produit:
$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$
2. En déduire que la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ diverge quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 13 Soit $n \geqslant 2$. On pose: $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

1. Montrer que $k^3-1 = (k-1)\,(k^2+k+1)$ et $k^3+1 = (k+1)\,(k^2-k+1)$.
En déduire: $P_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.
2. En remarquant que $k^2+k+1 = (k+1)^2-(k+1)+1$, en déduire une simplification de P_n.