# Oral G2E

## Exercice avec préparation

On note, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ -a & a & -b \\ b & -b & 2a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

et

$$\mathcal{E} = \{M_{a,b}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner sa dimension.
2. On considère, dans la suite de l'exercice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Donner en fonction de $A$ et $B$ : $A^2$, $AB$, $BA$, $B^2$.
3. $\mathcal{E}$ est-il stable par produit ?
4. Donner les valeurs propres de $A$.

## Exercice avec préparation

On lance indéfiniment une pièce qui tombe sur pile avec probabilité $p \in \,]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n$ la v.a. donnant le numéro du tirage où l'on obtient le $n$-ième pile.

1. Pour $n = 1$, donner la loi, l'espérance et la variance de $X_1$.
2. Pour $n \geq 2$,
   (a) Déterminer précisément l'ensemble des valeurs prises par $X_n$
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir $n-1$ piles au cours de $n+k-1$ lancers.
   (c) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\, \mathbb{P}(X_n = n+k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k$$

   (d) En utilisant le fait que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = n+k) = 1$, déterminer $\mathbb{E}(X_n)$.

**Exercice avec préparation**

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit $T$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, de fonction de répartition notée $\Phi$. Soit $a$ un nombre réel strictement positif.
On considère la variable aléatoire $X$ définie par $X = |T| + a$.

1. Déterminer la fonction de répartition $F$ de la variable $X$ en fonction de $\Phi$.
2. Montrer que la variable $X$ est à densité, et expliciter une densité $f$ de $X$.
3. Montrer que $X$ admet une espérance et la calculer.

**Exercice avec préparation**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On considère l'application $F$ définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad F(P) = P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X).$$

1. Montrer que $F$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .
2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $P_k(X) = X^{n-k}$ et $Q_k = F(P_k)$.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer $Q_k$ en fonction de $P_k$ et $P_{k+1}$.
3. Déterminer la matrice $M$ de $F$ dans la base $(P_1, \ldots, P_n)$.
4. L'endomorphisme $F$ est-il diagonalisable ?