

COMPLÉMENTS D'ANALYSE

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.1 Limites de suites et de fonctions

1.1.1 Notion de voisinage

Définition 1.1

Soit $V \subset \mathbb{R}$. On dit que V est **un voisinage** :

- de $a \in \mathbb{R}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $V = [a - \varepsilon; a + \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq \varepsilon\}$.
- de $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que $V = [A, +\infty[$.
- de $-\infty$ s'il existe $A < 0$ tel que $V =]-\infty, A]$.

Pour $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ on note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a .

Définition 1.2 (Adhérence)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que a est **adhérent** à X si tout voisinage de a intersecte X .

Exemple 1.1. Lorsque X est un intervalle les points adhérents sont les éléments de X ainsi que ses bornes.

1.1.2 Limites de suites, de fonctions

Définition 1.3

Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, a un élément adhérent à X et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f a **pour limite ℓ en a** et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ (ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$) qui se lit « $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a » si :

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell, \exists W \in \mathcal{V}_a, \forall x \in X, x \in W \Rightarrow f(x) \in V.$$

Exemple 1.2 (Cas des suites). Lorsque $X = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, f n'est rien d'autre qu'une suite et on retrouve la définition de limite d'une suite :

— si $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq A \Rightarrow |f(n) - \ell| \leq \varepsilon.$$

— si $\ell = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \ell$ si et seulement si

$$\forall B > 0, \exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq A \Rightarrow f(n) \geq B.$$

— si $\ell = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \ell$ si et seulement si

$$\forall B < 0, \exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq A \Rightarrow f(n) \leq B.$$

Exemple 1.3 (Cas des fonctions). Lorsque f est définie sur un intervalle I et a est un élément ou une borne de I cela se traduit :

— Lorsque $\ell \in \mathbb{R}$.

— si $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon,$$

— si $a = +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon,$$

— si $a = -\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A < 0 \forall x \in I, x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

— Lorsque $\ell = +\infty$.

— si $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall A > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A,$$

— si $a = +\infty$:

$$\forall A > 0 \exists B > 0 \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A,$$

— si $a = -\infty$:

$$\forall A > 0 \exists B < 0 \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A.$$

— Lorsque $\ell = -\infty$.

— si $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall A < 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq A,$$

— si $a = +\infty$:

$$\forall A < 0 \exists B > 0 \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A,$$

— si $a = -\infty$:

$$\forall A < 0 \exists B < 0 \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A.$$

1.1.3 Propriétés sur les limites

Proposition 1.1

Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, a un élément adhérent à X .
La limite de f en a , si elle existe, est unique.

Théorème 1.0 (Résultats fondamentaux pour les fonctions)

1. **Passage à la limite dans les inégalités larges** : si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a alors (sous réserve d'existence) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

2. **Théorème de la limite monotone** : soit f une fonction croissante sur $I =]a, b[$. Alors f admet une limite à droite en a (finie si f est minorée et égale à $-\infty$ sinon) et une limite à gauche en b (finie si f est majorée et égale à $+\infty$ sinon).

Le résultat s'adapte aux fonctions décroissantes.

3. **Théorème des gendarmes** : soient f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I et a un élément ou une borne de I .

Si f et h admettent une même limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en a et qu'au voisinage de a on a : $f \leq g \leq h$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

4. **Lien avec les suites** : soit f une fonction admettant pour limite b en a et soit (u_n) une suite de limite a . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b.$$

1.1.4 Opérations sur les limites, limites usuelles

Proposition 1.2 (Croissances comparées pour les fonctions)

Soient a , b et c trois réels strictement positifs.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{bx^c}}{x^a} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^a (\ln(x))^b = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^a e^{bx} = 0.$$

Proposition 1.3 (Croissances comparées pour les suites)

Soient a, b deux réels strictement positifs et $c > 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{c^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{n!} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c^n}{n!} = 0.$$

$\lim_a f$	$\lim_a g$	$\lim_a (f + g)$	$\lim_a f \times g$	$\lim_a \frac{f}{g}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\ell + \ell'$	$\ell \ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	$\pm\infty$ (*)
0	0	0	0	F.I
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (*)	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	0
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (*)	$\pm\infty$ (*)
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	F.I	$\pm\infty$ (*)
$+\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$	F.I
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I

- Le symbole (*) signifie que le signe est à étudier selon la règle des signes.
- F.I désigne les formes indéterminées qu'il faut étudier au cas par cas.

TABLE 1.1 – Opérations sur les limites

$\lim_a f$	exp	ln	$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	arctan(x)
$-\infty$	0		$\pm\infty$ selon la parité de n	$-\frac{\pi}{2}$
0	1	$-\infty$ (en 0^+)	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{\pi}{2}$

TABLE 1.2 – Limites usuelles

1.2 Relations de comparaison

1.2.1 Négligeabilité

Définition 1.4

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{R}$. On considère $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un élément adhérent à X .

On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a).

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On note alors $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$.

Remarque 1.1.

1. Lorsque X est un intervalle et a un élément ou une borne de X , on obtient la définition que vous avez vue l'an dernier pour la relation de négligeabilité entre deux fonctions d'une variable réelle.
2. Lorsque $X = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, on obtient la définition que vous avez vue l'an dernier pour la relation de négligeabilité entre deux suites.

Exemple 1.4.

1. **Croissances comparées** : soient a, b, c des réels strictement positifs.

$$x^a = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{bx^c}) \quad ; \quad \ln(x)^b = o_{x \rightarrow +\infty}(x^a) \quad ; \quad n^a = o_{n \rightarrow +\infty}(n!) \quad \dots$$

2. Soient $m < n$ des entiers naturels.

$$x^m = o_{x \rightarrow +\infty}(x^n) \quad ; \quad x^n = o_{x \rightarrow 0}(x^m).$$

Proposition 1.4 (Utile pour les DL)

Soient λ, μ des réels et soit m et n des entiers naturels. Alors :

1. $\lambda \times o_{x \rightarrow 0}(x^n) + \mu \times o_{x \rightarrow 0}(x^n) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$;
2. $x^m \times o_{x \rightarrow 0}(x^n) = o_{x \rightarrow 0}(x^{n+m})$;
3. $o_{x \rightarrow 0}(x^m) \times o_{x \rightarrow 0}(x^n) = o_{x \rightarrow 0}(x^{n+m})$;
4. si $m < n$ on a : $o_{x \rightarrow 0}(x^n) + o_{x \rightarrow 0}(x^m) = o_{x \rightarrow 0}(x^m)$.

1.2.2 Équivalence

Définition 1.5

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{R}$. On considère $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un point adhérent à X .

On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a).

On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Remarque 1.2.

1. Lorsque X est un intervalle et a un élément ou une borne de X , on obtient la définition que vous avez vue l'an dernier pour l'équivalence entre deux fonctions d'une variable réelle.
2. Lorsque $X = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, on obtient la définition que vous avez vue l'an dernier pour l'équivalence entre deux suites.

Proposition 1.5 (Opérations sur les équivalents)

Soient f, g, h et e quatre fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}$. On considère $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un point adhérent à X .

1. (*Symétrie*) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$.
2. (*Transitivité*) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$.
3. (*Produit*) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} e(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)e(x)$.
4. (*Inverse*) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a) alors $\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$.
5. (*Puissance*) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)^k \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^k$.
6. (*Valeur absolue*) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x \rightarrow a}{\sim} |g(x)|$.

Remarque 1.3.

1. Un cas particulier du point 3 en prenant $e = h$ donne :
si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)h(x)$.
2. Les points 3 et 4 signifient que la relation d'équivalence est compatible avec le produit et l'inverse.
3. **La relation d'équivalence n'est pas compatible avec l'addition : on n'additionne jamais des équivalents !**
4. Les points 5 et 6 signifient que la relation d'équivalence est compatible avec la composition à gauche par une fonction puissance ou la fonction valeur absolue.
5. **La relation d'équivalence n'est pas compatible avec la composition à gauche en général : par exemple, on ne passe jamais au logarithme ou à l'exponentielle dans les équivalents !**

Exemple 1.5.

- On ne peut pas additionner/soustraire membre à membre dans les équivalents :
 - $\ln(x-2) + 3 \underset{x \rightarrow 2^+}{\sim} \ln(x-2) + 2$ mais $3 \not\sim 2$.
 - $2 + 3e^x \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} 2 + \pi e^x$ mais $3e^x \not\sim \pi e^x$.
- On ne peut pas composer par la gauche membre à membre dans les équivalents :

$$1 + \sin(x) \underset{x \rightarrow \pi}{\sim} 1 + \sin^2(x) \quad \text{mais} \quad \ln(1 + \sin(x)) \not\sim \ln(1 + \sin^2(x)).$$

Proposition 1.6 (Composition à droite)

Soit f, g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Soit h une fonction définie au voisinage de $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ telle que $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = a$.

Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ alors $f \circ h \underset{x \rightarrow b}{\sim} g \circ h$.

Proposition 1.7 (Équivalents usuels)

- On a les équivalents suivants au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad ; \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad ; \quad (1+x)^a - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ax \quad (a \in \mathbb{R}^*)$$

$$1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad ; \quad \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad ; \quad \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad ; \quad \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0 alors :

$$\ln(1+u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad (1+u_n)^a - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} au_n \quad (a \in \mathbb{R}^*)$$

$$1 - \cos(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2} \quad ; \quad \sin(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad \tan(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad \arctan(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

- Soient $n > p$ et $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p+1}$ avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$.

- En $+\infty$ et $-\infty$:

$$a_p x^p + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$

- En 0 :

$$a_p x^p + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p.$$

Proposition 1.8 (Limite et équivalent)

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un élément adhérent à X .

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ quand x tend vers a alors g admet pour limite ℓ quand x tend vers a .
- Si f admet une limite **finie et non nulle** ℓ quand x tend vers a alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$.

Méthode 1.1

Pour déterminer un équivalent simple d'une fonction au voisinage d'un point a , on utilise les mêmes méthodes que pour les suites :

1. on peut procéder de manière directe : souvent de la même manière que pour lever une forme indéterminée (factorisation par le terme dominant au voisinage de a , multiplication par la quantité conjuguée...);
2. on peut parfois déterminer un équivalent à l'aide d'un encadrement par deux fonctions équivalentes entre elles;
3. on peut utiliser les équivalents usuels et les opérations sur les équivalents.

Exemple 1.6 (Classique). Équivalent de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.

- On passe sous forme exponentielle : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$.
- On reconnaît un équivalent usuel dans l'exponentielle : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
- Par compatibilité avec le produit : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$.
- Attention, on n'a pas le droit de composer à gauche dans les équivalents : ici on ne peut pas « passer à l'exponentielle ».

Cependant, l'équivalent précédent donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et par continuité de l'exponentielle en 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^1 = e.$$

- Enfin, comme $e \neq 0$, on en déduit l'équivalent : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e$.

1.3 Développements limités

Définition 1.6 (Développement limité en 0)

Soit f une fonction définie sur intervalle I contenant 0. On dit que f possède un développement limité à l'ordre n en 0 s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{reste}}.$$

Remarque 1.4.

1. Si f admet un $DL_n(0)$ alors celui-ci est unique.
2. Si f admet un $DL_n(0)$ alors pour tout $p \leq n$, f admet un $DL_p(0)$: sa partie régulière s'obtient en tronquant à l'ordre p la partie régulière $DL_n(0)$.

3. **(HP)** Plus généralement, si f est une fonction définie au voisinage d'un réel a , on dit que f possède un développement limité à l'ordre n en a s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o_{x \rightarrow a}((x - a)^n).$$

On a alors l'équivalence :

$$f \text{ possède un } DL_n(a) \iff x \mapsto f(x + a) \text{ possède un } DL_n(0).$$

Proposition 1.9 (Primitivation de DL)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si f' admet le $DL_n(0)$ suivant :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

alors f admet le $DL_{n+1}(0)$ suivant :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}).$$

Preuve : On suppose que : $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.

Soit F la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Il suffit de montrer que $F(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$.

La fonction f est dérivable sur I donc F l'est aussi et pour tout $x \in I$ on a :

$$F'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k = o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

Soit $x \in I$. On suppose $x > 0$, le cas $x < 0$ se traitant de manière similaire.

La fonction F est dérivable sur $[0, x]$ et on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$\exists \theta_x \in]0, x[\quad \frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(\theta_x).$$

En remarquant que $F(0) = f(0) - f(0) = 0$, on obtient :

$$F(x) = xF'(\theta_x).$$

Ainsi :

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} = \frac{F'(\theta_x)}{x^n} = \frac{F'(\theta_x)}{\theta_x^n} \times \frac{\theta_x^n}{x^n}.$$

Or $\left| \frac{\theta_x^n}{x^n} \right| \leq 1$ et, par composition des limites, comme $\lim_{x \rightarrow 0} \theta_x = 0$ (gendarmes) et $F'(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(\theta_x)}{\theta_x^n} = 0$.
Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{n+1}} = 0$ i.e. $F(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$. □

Proposition 1.10 (DL d'ordre 0 et d'ordre 1)

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant 0. Alors :

1. f est continue en 0 si et seulement si elle possède un $DL_0(0)$.
Dans ce cas, ce DL est donné par : $f(x) = f(0) + o_{x \rightarrow 0}(1)$.
2. f est dérivable en 0 si et seulement si elle possède un $DL_1(0)$.
Dans ce cas, ce DL est donné par : $f(x) = f(0) + f'(0)x + o_{x \rightarrow 0}(x)$.

Preuve :

1. $\Rightarrow$ Supposons f continue en 0. Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - f(0) = 0$ i.e. $f(x) - f(0) = o_{x \rightarrow 0}(1)$.
 $\Leftarrow$ Supposons que f admet le DL d'ordre 0 suivant :

$$f(x) = a_0 + o_{x \rightarrow 0}(1).$$

Comme $o_{x \rightarrow 0}(1)$ est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0, \forall x \in [-a, a], |f(x) - a_0| \leq \varepsilon.$$

En particulier, comme pour tout $a > 0$, $0 \in [-a, a]$ on en déduit :

$$\forall \varepsilon > 0, |f(0) - a_0| \leq \varepsilon.$$

Donc $a_0 = f(0)$. On a alors :

$$f(x) = f(0) + o_{x \rightarrow 0}(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0).$$

Donc f est continue en 0.

2. $\Rightarrow$ Supposons f dérivable en 0. Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$
i.e. $\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) + o_{x \rightarrow 0}(1)$.

En multipliant membre à membre par x on obtient alors :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o_{x \rightarrow 0}(x).$$

$\Leftarrow$ Supposons que f admet le DL d'ordre 1 suivant :

$$f(x) = a_0 + a_1x + o_{x \rightarrow 0}(x).$$

En particulier par troncature, f admet le DL d'ordre 0 suivant

$$f(x) = a_0 + o_{x \rightarrow 0}(1).$$

D'après le point précédent, on sait donc que $a_0 = f(0)$.

Ainsi au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + a_1x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

D'où

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + o_{x \rightarrow 0}(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_1.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

□

Remarque 1.5. D'après le point 3 de la remarque 1.4, on a, plus généralement, pour toute fonction f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$:

1. f est continue en a si et seulement si elle possède un $DL_0(a)$.

Dans ce cas, ce DL est donné par : $f(x) = f(a) + o_{x \rightarrow a}(1)$.

2. f est dérivable en a si et seulement si elle possède un $DL_1(a)$.

Dans ce cas, ce DL est donné par : $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a)$.

Théorème 1.0 (Formule de Taylor-Young)

Soit f une fonction $n \in \mathbb{N}^*$ fois dérivable sur un intervalle contenant 0. Alors f admet le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

Preuve : On procède par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « toute fonction f dérivable n fois au voisinage de

0 possède le $DL_n(0)$ suivant : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. »

— **Initialisation.** C'est le point 2 de la proposition précédente.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Soit f une fonction $n + 1$ fois dérivable au voisinage de 0.

La fonction f' est n fois dérivable au voisinage de 0 donc d'après l'hypothèse de récurrence, f' possède le $DL_n(0)$ suivant :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

D'après le théorème de primitivation des DL, on en déduit que f admet le $DL_{n+1}(0)$ suivant :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^{k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}). \end{aligned}$$

Cela clôt l'hérédité.

□

Fonction	Développement limité
e^x	$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
$\ln(1-x)$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
$\cos(x)$	$= 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$
$\sin(x)$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$
$(1+x)^a$	$= 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2} + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$

TABLE 1.3 – DL usuels à connaître par cœur.

Proposition 1.11 (Opérations sur les DL)

Soient f et g deux fonctions admettant un $DL_n(0)$. Alors :

- $f + g$ admet un DL_n obtenu en additionnant les parties régulières des $DL_n(0)$ de f et g ;
- fg admet un $DL_n(0)$ obtenu en multipliant les parties régulières des $DL_n(0)$ de f et g et en tronquant le résultat à l'ordre n ;
- si de plus $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ alors $f \circ g$ possède un $DL_n(0)$ obtenu en composant les parties régulières des $DL_n(0)$ de f et g et en tronquant le résultat à l'ordre n .

Exemple 1.7.

1. Soit $f : x \mapsto e^x + \sin(x)$.

Comme $\exp$ et $\sin$ possèdent les $DL_3(0)$ suivants :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad ; \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

alors f possède le $DL_3(0)$ suivant :

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

2. Soit $g : x \mapsto e^x \ln(1+x)$.

Les fonctions $\exp$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ possèdent les $DL_3(0)$ suivants :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad ; \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

Or :

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \text{termes d'ordre supérieur.}$$

Donc g possède le $\text{DL}_3(0)$ suivant :

$$g(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

3. Soit $h : x \mapsto \sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 + \cos(x) - 1}$.

Les fonctions $x \mapsto \cos(x) - 1$ et $x \mapsto \sqrt{1+x}$ possèdent les $\text{DL}_3(0)$ suivants :

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad ; \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

De plus $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) - 1 = 0$ et en posant $X = -\frac{x^2}{2}$ on a :

$$1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + \frac{X^3}{16} = 1 - \frac{x^2}{4} + \text{termes d'ordre supérieur à 4.}$$

Donc h possède le $\text{DL}_3(0)$ suivant :

$$h(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

1.3.1 Applications

Proposition 1.12 (Position relative par rapport à une tangente)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I .

1. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède une tangente non vertical en a si et seulement si f est dérivable en a .

L'équation réduite de la tangente est alors donnée par **la partie régulière du DL_1 de f en a .**

2. Si f admet un DL de la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_n(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \quad \text{où } a_n \neq 0$$

alors la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente est donnée par le signe de $a_n(x-a)^n$.

- Cas n pair : la courbe ne traverse pas sa tangente.
 - Si $a_n > 0$: la courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage de a .
 - Si $a_n < 0$: la courbe est en-dessous de sa tangente au voisinage de a .
- Cas n impair : la courbe traverse sa tangente.
 - Si $a_n > 0$: la courbe est en-dessous pour $x < a$ puis au-dessus pour $x > a$.
 - Si $a_n < 0$: la courbe est au-dessus pour $x < a$ puis en-dessous pour $x > a$.

Exemple 1.8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On sait que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

donc

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

En particulier, f est continue en 0 (DL d'ordre 0) et dérivable en 0 (DL d'ordre 1).

L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :

$$y = 1$$

et comme le terme d'ordre 2 est strictement négatif, la courbe est située sous sa tangente au voisinage de 0.

En particulier, la tangente est horizontale et la courbe est située sous la tangente donc f possède un maximum local en 0.

La fonction f est-elle C^1 en 0 ?

On a vu que f possède une DL d'ordre 2 en 0 donc elle possède aussi un DL d'ordre 1 en 0 par troncature. Ainsi f est dérivable en 0 et le coefficient d'ordre 1 valant 0 on a

$$f'(0) = 0.$$

D'autre part, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}.$$

Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2} = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)x - x + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{x^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{3}x + o_{x \rightarrow 0}(x) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ et f' est continue en 0.