

Mathématiques – Révisions

COMPLÉMENTS D'ANALYSE

1 Équivalents et DL

Exercice 1. Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes au voisinage de x_0 et en déduire la limite en x_0 .

1. $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x_0 = +\infty$.

4. $l(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = +\infty$.

2. $i(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - 1$ en $x_0 = +\infty$.

5. $m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ en $x_0 = +\infty$.

3. $j(x) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2 + x}$ en $x_0 = 0$.

6. $n(x) = \frac{x - \ln(x)}{x+1}$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.

Exercice 2. Déterminer, si elle existe, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de :

1. $\frac{\sin(n)}{n}$;

3. $(2 + e^{-n}) \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \sqrt{n^2 + 1}$;

2. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$;

4. $e^n(1 - \cos(ne^{-n}))$.

Exercice 3. Déterminer un DL à l'ordre 3 en zéro dans chaque cas.

1. $\cos(x) + e^x$,

2. $\sin(x)\sqrt{1+x}$,

3. $\sqrt{1 + \sin(x)}$.

Exercice 4. Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $\frac{\sin x - x}{x^3}$;

3. $\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}$;

2. $\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$;

4. $\frac{\exp(x^2) \cos(2x) - 1}{\sin(x^2) - x^2}$.

Exercice 5. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x(2 - \cos(x))}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.

3. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

4. Faire l'étude locale de f en 0 : dérivabilité, tangente et position relative par rapport à sa tangente.

Exercice 6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I .

1. Montrer que f est dérivable en a si et seulement si $x \mapsto f(x+a)$ admet un $DL_1(0)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f admet un $DL_2(0)$ mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

2 Divers

Exercice 7. Soit $t \geq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P_t(x) = x^3 + tx - 1$.

1. Montrer que P_t admet une unique racine réelle que l'on notera $u(t)$.
2. (a) Montrer que $u(t) \in]0, 1]$.
 (b) Démontrer que $u : t \mapsto u(t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
 (c) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$.

Indication : calculer $P_t(u(t))$.

3. Montrer que u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0, 1]$ et que sa bijection réciproque est la fonction v définie par :

$$\forall y \in]0, 1], \quad v(y) = \frac{1 - y^3}{y}.$$

4. (a) Justifier que u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
 (b) Justifier que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, une expression de $u'(t)$ en fonction de t et $u(t)$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante convergeant vers une limite finie ℓ . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.
2. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

3. En déduire la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 9. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{x \ln(x) - 1}{x}$$

et on définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 &= e \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \varphi(u_n) + u_n \end{cases}.$$

1. Dresser le tableau de variations de φ en faisant apparaître les limites en 0 et $+\infty$.
2. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\varphi(\alpha) = 0$.
 Justifier que $\alpha \in [1; e]$
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , u_n existe et $u_n > \alpha$.
4. Si cette suite est convergente de limite finie L , que peut valoir L ?
5. Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
6. Étudier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = xe^{-x}$.

1. Étudier les variations de f et déterminer sa limite en $+\infty$.
2. Soit $n \geq 3$. Justifier que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède deux solutions. On notera u_n et v_n ces solutions avec $u_n < v_n$.
3. Justifier que pour tout $n \geq 3$ on a $u_n \in [0, 1]$ et $v_n \in [1, +\infty[$.
4. Étudier la monotonie de des suites $(u_n)_{n \geq 3}$ et $(v_n)_{n \geq 3}$.
5. Déterminer la limite de chacune des deux suites.
6. (a) En déduire un équivalent de (u_n) .
(b) Justifier que : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.