

Mathématiques – Révisions

COMPLÉMENTS D'ANALYSE

1 Équivalents et DL

Correction exercice 1.

1. Par équivalent usuel : $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

2. En posant $X = \frac{1}{x^3}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$. Ainsi par équivalent usuel :

$$i(x) = \sqrt{1+X} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}X = \frac{1}{2x^3}.$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^3} = 0$.

3. En posant $X = -x^2$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$. Donc par équivalent usuel :

$$e^{-x^2} = e^X - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} X = -x^2.$$

De plus, par équivalent usuel : $x^2 + x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient, on obtient :

$$j(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{x} = -x.$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} j(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$.

4. Soit $x > 0$. En factorisant par le terme dominant au voisinage de $+\infty$ dans le logarithme on obtient :

$$l(x) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Maintenant, on factorise par le terme dominant au voisinage de $+\infty$:

$$l(x) = \ln(x) \left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Ainsi : $l(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

5. Soit $x > 0$. On a :

$$m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}.$$

Par équivalent usuel en $+\infty$ on a : $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ donc par passage à l'inverse :

$$m(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

6. • En 0^+ : par équivalent usuel on a :

$$x + 1 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 1.$$

En factorisant le numérateur par le terme dominant en 0^+ on obtient :

$$\forall x > 0, \quad x - \ln(x) = -\ln(x) \left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right).$$

Or par croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{x}{\ln(x)} = 1.$$

Donc

$$x - \ln(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$n(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x.$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 0^+} n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty.$$

• En $+\infty$: par équivalent usuel on a :

$$x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x.$$

En factorisant le numérateur par le terme dominant en $+\infty$ on obtient :

$$\forall x > 0, \quad x - \ln(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1.$$

Donc

$$x - \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x.$$

Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} n(x) = 1.$$

Correction exercice 2.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \left| \frac{\sin(n)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ on en déduit par encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{n+1 - (n+2)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})}.$$

Or on sait que :

$$n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{-1}{n} = -1.$$

Par conséquent, la continuité de la fonction exponentielle en -1 donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{-1}.$$

4. Par équivalent usuel : $\sin \left(\frac{1}{n+1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$

On en déduit :

$$(2 + e^{-n}) \sin \left(\frac{1}{n+1} \right) \sqrt{n^2 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \times \frac{1}{n} \times \sqrt{n^2 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \times \frac{1}{n} \times n = 2.$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + e^{-n}) \sin \left(\frac{1}{n+1} \right) \sqrt{n^2 + 1} = 2.$$

5. Par équivalent usuel : $1 - \cos(ne^{-n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2 e^{-2n}}{2}.$ Ainsi :

$$e^n (1 - \cos(ne^{-n})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2 e^{-n}}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Correction exercice 3.

1. On sait que :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

Ainsi :

$$\cos(x) + e^x = 2 + x + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

2. On sait que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sin(x)\sqrt{1+x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \end{aligned}$$

3. On sait que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o_{u \rightarrow 0}(u^3).$$

Or $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc on peut composer les équivalents :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\sin(x)} &= \sqrt{1+x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\ &= 1 + \frac{x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{2} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)^2}{8} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)^3}{16} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right)x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o_{x \rightarrow 0}(x^3). \end{aligned}$$

Correction exercice 4.

1. Au numérateur, on a une différence de deux termes équivalents en 0. Comme on ne peut pas soustraire les équivalents, on va plutôt utiliser les DL :

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + o_{x \rightarrow 0}(1) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2. Au numérateur et au dénominateur, on a encore une différence de deux termes équivalents en 0. Comme on ne peut pas soustraire les équivalents, on va plutôt utiliser les DL ici aussi :

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} &= \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)} \\
 &= \frac{-x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)} \\
 &= \frac{-1 + o_{x \rightarrow 0}(1)}{\frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1)} \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -2.
 \end{aligned}$$

3. On suit la même stratégie pour la même raison :

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - \left(x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1) \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

4. Toujours pareil.

$$\begin{aligned}
 \frac{\exp(x^2) \cos(2x) - 1}{\sin(x^2) - x^2} &= \frac{\left(1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}((2x)^2)\right) - 1}{x^2 - \frac{(x^2)^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}((x^2)^3) - x^2} \\
 &= \frac{\left(1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \left(1 - 2x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) - 1}{-\frac{x^6}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)} \\
 &= \frac{1 - x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - 1}{-\frac{x^6}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)} \\
 &= \frac{x^2}{x^6} \times \frac{-1 + o_{x \rightarrow 0}(1)}{-\frac{1}{6} + o_{x \rightarrow 0}(1)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{6}{x^4} \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty.
 \end{aligned}$$

Correction exercice 5. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x(2 - \cos(x))}$.

1. Il est évident que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
2. On sait que : $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

On peut donc prolonger continument f en 0 en posant $f(0) = 1$.

3. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)}{x(2 - 1 + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3))} \\ &= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{1 + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \\ &= 1 - \frac{2}{3}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3). \end{aligned}$$

4. Avec le DL en 0 on obtient :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{2}{3}x + o_{x \rightarrow 0}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

La tangente à la courbe de f en 0 est la droite d'équation $y = 1$ et comme :

$$f(x) - 1 = -\frac{2}{3}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \leq 0 \quad \text{au voisinage de 0}$$

alors la courbe de f est localement en-dessous de sa tangente en 0.

Correction exercice 6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I .

1. Supposons f dérivable en a . Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(a)}{x} = f'(a).$$

Autrement dit :

$$\frac{f(x+a) - f(a)}{x} = f'(a) + o_{x \rightarrow 0}(1).$$

Ainsi :

$$\frac{f(x+a) - f(a)}{x} = f(a) + xf'(a) + x o_{x \rightarrow 0}(1) = f(a) + xf'(a) + o_{x \rightarrow 0}(x).$$

Réciproquement, si $x \mapsto f(x+a)$ admet le $DL_1(0)$ suivant :

$$f(x+a) = a_0 + a_1x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

alors, on a $f(a) = a_0$ et DL se réécrit :

$$f(x+a) = f(a) + a_1x + o_{x \rightarrow 0}(x).$$

Alors, pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f(x+a) - f(a)}{x} = \frac{a_1x + o_{x \rightarrow 0}(x)}{x} = a_1 + o_{x \rightarrow 0}(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_1.$$

Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Comme $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée alors $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Ainsi :

$$f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

qui est bien un $DL_2(0)$ de f .

En particulier, f possède un $DL_1(0)$ donc elle est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ (le coefficient d'ordre 1 du DL).

Pour tout $x \neq 0$, on a par ailleurs :

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Étudions la dérivabilité en 0 de f' :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a déjà vu que $\lim_{x \rightarrow 0} 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc f' est dérivable en 0 si et seulement si

$x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ admet une limite finie en 0.

Supposons par l'absurde que ça soit le cas et notons ℓ la limite.

Alors, pour toute suite (u_n) qui tend vers 0, on aurait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = \ell.$$

- Avec $(u_n) = \left(\frac{1}{2n\pi}\right)$, on a alors $\ell = 1$.
- Avec $(u_n) = \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)$, on a alors $\ell = 0$.

Contradiction.

Ainsi f' n'est pas dérivable en 0 et donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.

2 Divers

Correction exercice 7. Soit $t \geq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P_t(x) = x^3 + tx - 1$.

1. La fonction P_t est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'_t(x) = 3x^2 + t \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $x = t = 0$.

Ainsi P_t est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (en étudiant les limites en $\pm\infty$).

Par conséquent, il existe un unique réel $u(t)$ tel que $P_t(u(t)) = 0$.

2. (a) On a $P_t(0) = -1 < 0 = P_t(u(t)) \leq P_t(1) = t$.

Par croissance stricte de P_t , on en déduit donc :

$$0 < u(t) \leq 1.$$

- (b) Soient $0 \leq t < s$ et montrons que $u(t) > u(s)$. Pour cela, on va calculer $P_t(u(s))$ et regarder son signe :

$$\begin{aligned} P_t(u(s)) &= u(s)^3 + tu(s) - 1 = u(s)^3 + su(s) - 1 + (t - s)u(s) \\ &= P_s(u(s)) + (t - s)u(s) \\ &= (t - s)u(s) \\ &< 0 = P_t(u(t)). \end{aligned}$$

Comme P_t est strictement croissante, on a donc :

$$u(s) < u(t).$$

- (c) D'après les questions précédentes, u est décroissante et bornée donc par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

De plus, pour tout $t \geq 0$ on a

$$0 = P_t(u(t)) = u(t)^3 + tu(t) - 1 \quad \text{i.e.} \quad tu(t) = 1 - u(t)^3.$$

Si $\ell \neq 0$, le membre de gauche ci-dessus tend vers $\pm\infty$ alors que le membre de droite tend vers $1 - \ell^3$ ce qui est absurde.

Ainsi $\ell = 0$.

3. Soit $y \in]0, 1]$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$y = u(t) \iff y^3 + ty - 1 = 0 \iff t = \frac{1 - y^3}{y}.$$

Cela montre que u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0, 1]$ et que sa bijection réciproque est la fonction v définie par :

$$\forall y \in]0, 1], \quad v(y) = \frac{1 - y^3}{y}.$$

4. (a) Il est facile de voir que v est continue et strictement décroissante. Le théorème de la bijection assure alors que sa bijection réciproque, à savoir u , est continue sur $\mathbb{R}_+$.
(b) On sait que v est dérivable et que :

$$\forall y \in]0, 1], \quad v'(y) = -\frac{2y^3 + 1}{y^2} < 0.$$

Comme v' ne s'annule pas sur $]0, 1]$, sa bijection réciproque u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geq 0$:

$$u'(t) = \frac{1}{v'(u(t))} = -\frac{u(t)^2}{2u(t)^3 + 1}.$$

Correction exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante convergeant vers une limite finie ℓ . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \\ &= \frac{nu_1 + \cdots + nu_n + nu_{n+1} - (n+1)u_1 - \cdots - (n+1)u_n}{n(n+1)} \\ &= \frac{nu_{n+1} - u_1 - \cdots - u_n}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Or la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u_{n+1} \geq u_k.$$

Ainsi

$$nu_{n+1} \geq u_1 + \cdots + u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n \geq 0.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Par ailleurs, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente donc majorée. En notant M un majorant, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \leq \frac{M + \cdots + M}{n} = M.$$

Ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc elle converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{u_1 + \cdots + u_{2n}}{2n} = \frac{u_1 + \cdots + u_n + \cdots + u_{2n}}{2n} \\ &= \frac{v_n}{2} + \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{2n} \\ &\geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n + \cdots + u_n}{2n} \quad \text{par croissance de } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \\ &\geq \frac{v_n}{2} + \frac{nu_n}{2n} \\ &\geq \frac{u_n + v_n}{2}. \end{aligned}$$

3. Soit ℓ' la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En passant à la limite dans la relation précédente on a :

$$\ell' \geq \frac{\ell + \ell'}{2} \quad \text{i.e.} \quad \ell' \geq \ell.$$

D'autre part, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \leq \frac{u_n + \cdots + u_n}{n} = u_n.$$

D'où en passant à la limite :

$$\ell' \leq \ell.$$

Finalement $\ell = \ell'$.

Correction exercice 9.

1. D'après les théorèmes sur les opérations sur les fonctions dérivables, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = \frac{(x \times \frac{1}{x} + \ln(x)) \times x - (x \ln(x) - 1)}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0.$$

Ainsi, φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Par croissance comparée on sait que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$. Donc par opérations sur les limites, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty.$$

- On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x) - \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

Ainsi :

x	0	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		+
Variations de φ	$-\infty$	$+\infty$

2. La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ (et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante). En particulier, comme $0 \in \varphi(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$, il possède un unique antécédent par φ . Ainsi, l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique solution, notée α .

Par ailleurs,

$$\varphi(1) = -1 < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(e) = \frac{e-1}{e}.$$

Par croissance stricte de φ^{-1} , on a donc

$$1 < \alpha < e$$

et a fortiori $\alpha \in [1, e]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « u_n est bien défini et $u_n > \alpha$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : comme $u_0 = e$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après ce qui précède.
- *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et strictement supérieur à α . En particulier u_n appartient à l'ensemble de définition de φ . Par conséquent, $u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n$ est bien défini. De plus, on a, par hypothèse de récurrence et croissance stricte de φ :

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n > \varphi(\alpha) + \alpha = \alpha.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est bien défini et } u_n > \alpha.$$

- Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L . En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve :

$$L \geq \alpha > 0.$$

Or, $x \mapsto \varphi(x) + x$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc L est un point fixe de $x \mapsto \varphi(x) + x$. Soit $x > 0$.

$$\varphi(x) + x = x \iff \varphi(x) = 0 \iff x = \alpha.$$

Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L nécessairement $L = \alpha$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) + u_n - u_n = \varphi(u_n).$$

Or, $u_n > \alpha$ donc par croissance de φ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) > \varphi(\alpha) = 0.$$

Donc $u_{n+1} > u_n$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.

La suite est donc croissante.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L . Alors, d'après la question 4, $L = \alpha$. Or, par croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout entier naturel n on a :

$$u_0 \leq u_n.$$

Par passage à la limite on obtient :

$$u_0 \leq \alpha.$$

Cela contredit la question 3.

Par conséquent, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Correction exercice 10.

- La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = (1 - x)e^{-x}.$$

Par ailleurs, par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On en déduit :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	0	e^{-1}	0

2. Soit $n \geq 3$.

La fonction f est strictement croissante et continue sur $[0, 1]$ donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $f([0, 1[) = [0, e^{-1}[$. Or

$$n \geq 3 > e^{-1}.$$

Donc : $\frac{1}{n} \in f([0, 1[)$.

Par conséquent, $\frac{1}{n}$ possède un unique antécédent par f sur $[0, 1[$ c'est-à-dire que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[0, 1[$. On la note u_n .

De même, f est strictement décroissante et continue sur $[1, +\infty[$ donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) =]0, e^{-1}[$. Or

$$n \geq 3 > e^{-1}.$$

Donc : $\frac{1}{n} \in f([1, +\infty[)$.

Par conséquent, $\frac{1}{n}$ possède un unique antécédent par f sur $[1, +\infty[$ c'est-à-dire que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1, +\infty[$. On la note v_n .

Finalement, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède bien deux solutions sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $u_n < 1 \leq v_n$.

3. Dans la question précédente on a montré que

$$\forall n \geq 3, \quad u_n \in [0, 1] \quad \text{et} \quad v_n \in [1, +\infty[.$$

4. Par définition, de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ on a :

$$\forall n \geq 3, \quad f(u_n) = \frac{1}{n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc

$$f(u_n) = \frac{1}{n} > f(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}.$$

Supposons par l'absurde que $u_n \leq u_{n+1}$. Comme f est croissante sur $[0, 1]$ et que u_n et u_{n+1} sont dans $[0, 1]$ alors on en déduit :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}).$$

Contradiction. Ainsi : $u_n > u_{n+1}$.

Donc : $\forall n \geq 3, u_n > u_{n+1}$.

La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est donc strictement décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. De même supposons par l'absurde que $v_n \geq v_{n+1}$. Comme f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et que v_n et v_{n+1} sont dans $[1, +\infty[$ alors on en déduit :

$$\frac{1}{n} = f(v_n) \leq f(v_{n+1}) = \frac{1}{n+1}.$$

Contradiction. Ainsi : $v_n < v_{n+1}$.

Donc : $\forall n \geq 3, v_n < v_{n+1}$.

La suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est donc strictement croissante.¹

5. D'après les questions 3 et 4, la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et minorée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite ℓ .

De plus, on sait que pour tout entier supérieur ou égal à 3, on a : $f(u_n) = \frac{1}{n}$.

En passant à la limite dans cette égalité, compte tenu de la continuité de f , ℓ vérifie donc

$$\ell e^\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ainsi $\ell = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

D'après la question 4, la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est croissante. Par le théorème de la limite monotone, soit elle converge vers une limite ℓ soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons qu'elle converge vers une limite finie ℓ . On sait que pour tout entier supérieur ou égal à 3, on a : $f(v_n) = \frac{1}{n}$.

En passant à la limite dans cette égalité, compte tenu de la continuité de f , ℓ vérifie donc

$$\ell e^\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ainsi $\ell = 0$.

Mais : $\forall n \geq 3, v_n \geq 1$.

Donc par passage à la limite $\ell \geq 1$. Contradiction.

Ainsi $(v_n)_{n \geq 3}$ diverge vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.

6. Par la question précédente : $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-u_n} = 1$ donc on a :

$$\frac{1}{n} = u_n e^{-u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n.$$

7. On sait par la question précédente que $u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc :

$$u_n - \frac{1}{n} = \frac{e^{u_n}}{n} - \frac{1}{n} = \frac{e^{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{n} = \frac{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\text{Donc : } u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. On aurait aussi pu utiliser la bijection réciproque de f sur $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ respectivement.