

Mathématiques – TD2

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Exercice 1 ((★)). Déterminer et représenter l'ensemble de définition des fonctions de deux variables réelles suivantes :

1. la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln(xy) + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2y + x^2$,
2. la fonction $g : (x, y) \mapsto \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Exercice 2 ((★)). Représenter les lignes de niveau suivantes.

1. La ligne de niveau -1 de la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5$.
2. La ligne de niveau 0 de la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^2$.

Exercice 3 ((★)). Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^2 sur un pavé ouvert à préciser et calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

1. La fonction $f_1 : (x, y) \mapsto x^3y^3 + 3x^2y - 2y^2x + x + 1$.
2. La fonction $f_2 : (x, y) \mapsto \cos(3xy - y + 1)$.
3. La fonction $f_3 : (x, y) \mapsto \arctan(x + 2y)$.
4. La fonction $f_4 : (x, y) \mapsto x(\ln(x) + x + y^2)$.
5. La fonction $f_5 : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$.

Exercice 4 ((★★)). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et en déduire que l'ensemble des points critiques est :

$$\{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

3. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = xe^{-x}.$$

En déduire que les points critiques de f sont des extrema globaux (on précisera lesquels sont des maxima et lesquels sont des minima).

Exercice 5 ((★★)). Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. (a) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
(b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2. (a) Développer $2 \left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(y - \frac{1}{6} \right)^2$.
- (b) En déduire que f admet un minimum global en A .
3. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

- (a) Utiliser la question 2) pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$.
- (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 6 ((★★)). Soit $f : (x, y) \mapsto x^y - x$.

1. Déterminer et représenter l'ensemble de définition D de f .
2. Montrer que f est de classe C^1 sur D et déterminer les points critiques de f sur D .
3. Montrer : $f(1+h, 1-h) = -h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$.
4. En étudiant de même $f(1+h, 1+h)$, montrer que le point critique de f n'est pas un extremum.

Exercice 7 ((★★★)). Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et α, β des nombres réels non nuls. On pose pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(u, v) = f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v, \alpha \cdot u - \beta \cdot v).$$

1. Déterminer $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v)$ en fonction des dérivées partielles de f et de α et β .
2. Faire de même avec $\alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) - \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v)$ et résoudre l'équation d'inconnue $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) - \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = 0.$$

Exercice 8 ((★★★)). 1. Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

2. Même question avec C^2 .

Exercice 9 (Droite de régression linéaire (★★★)). Étant donné une série statistique double $(X, Y) = [(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)]$ avec $s_X^2 \neq 0$, il existe un unique couple (a, b) minimisant l'erreur quadratique $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$.

La droite d'équation $y = ax + b$ est alors appelée **la droite de régression linéaire de Y en X** et à pour équation réduite :

$$y = \frac{s_{(X,Y)}}{s_X^2} (x - \bar{X}) + \bar{Y}.$$

Cette droite est appelé **la droite de régression linéaire de Y en X** . Le but de l'exercice est de montrer ce résultat. On pose

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a, b) \longmapsto \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2.$$

1. Montrer que F est de classe C^2 et déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Montrer que $\left(\frac{s_{(X,Y)}}{s_X^2}, \bar{Y} - a\bar{X} \right)$ est l'unique point critique de F .