

BCPST2 – Mathématiques

DM0

Exercice 1.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$ par produit de limites usuelles ;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$ par produit de limites usuelles ;
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{4}$;
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x(1+e^{-x}))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{x} = 1$;
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ par produit de limites usuelles ;
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)e^x = -\infty$ par produit de limites usuelles.

Exercice 2.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (1-x)^3 + x.$$

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0.4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -3(1-x)^2 + 1 = -3x^2 + 6x - 2.$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré, donc :

x	$-\infty$	$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$

- (b) En se concentrant sur $[0, 1]$, le tableau devient :

x	0	$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
f	1		1

avec :

$$f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} > 0.$$

Ainsi, $f([0, 1]) \subset]0, 1[$ (*).

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n \in]0, 1[$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Initialisation : comme $u_0 = 0.4$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in]0, 1[$. D'après (*), on a donc :

$$u_{n+1} = f(u_n) \in]0, 1[.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0, 1[.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n < 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = (1 - u_n)^3 > 0.$$

Donc $u_{n+1} > u_n$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

La suite est donc croissante.

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge.

Notons ℓ sa limite.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Comme f est continue par passage à la limite on a : $f(\ell) = \ell$.

Or : $f(\ell) = \ell \iff (1 - \ell)^3 = 0 \iff \ell = 1$.

Ainsi (u_n) converge vers 1.

Exercice 4. Déterminer un équivalent simple de chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes.

1. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \ln(1 + 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Par équivalent usuel on a :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}.$$

Or comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$ encore par équivalent usuel :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

2. Ici, on va multiplier par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - \sqrt{4n^2 + n + 1} \\ &= \left(\sqrt{4n^2 + 5n + 2} - \sqrt{4n^2 + n + 1} \right) \times \frac{\sqrt{4n^2 + 5n + 2} + \sqrt{4n^2 + n + 1}}{\sqrt{4n^2 + 5n + 2} + \sqrt{4n^2 + n + 1}} \\ &= \frac{4n + 1}{\sqrt{4n^2 + 5n + 2} + \sqrt{4n^2 + n + 1}}. \end{aligned}$$

Le numérateur est équivalent à $4n$ par les équivalents usuels.

Pour le dénominateur, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{4n^2 + 5n + 2} + \sqrt{4n^2 + n + 1} &= \sqrt{4n^2 \left(1 + \frac{5}{4n} + \frac{1}{2n^2}\right)} + \sqrt{4n^2 \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}\right)} \\ &= 2n\sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{1}{2n^2}} + 2n\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} \\ &= 2n \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{1}{2n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} \right)\end{aligned}$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{1}{2n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}} = 2$. Donc, par compatibilité avec le produit, on a :

$$\sqrt{4n^2 + 5n + 2} + \sqrt{4n^2 + n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n \times 2,$$

puis, par compatibilité avec le quotient :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4n}{2n \times 2}.$$

Ainsi : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

Exercice 5. Déterminer le DL des fonctions suivantes en 0.

1. D'après les DL usuels, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

Par conséquent :

$$a(x) = -x + x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

2. On remarque que :

$$b(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} - 1.$$

Donc par DL usuel :

$$b(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - 1 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

Exercice 6. D'après les DL usuels, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 e^x - 1 - \ln(1+x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\
 &= x^2 + \underbrace{o_{x \rightarrow 0}(x^2) - o_{x \rightarrow 0}(x^2)}_{= o_{x \rightarrow 0}(x^2)} \\
 &= x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2).
 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on obtient :

$$e^x - 1 - \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2.$$

Par compatibilité des équivalents avec le passage au quotient on obtient :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

1 Probabilités

Exercice 7.

1. (a) `def X(p):`
 `if np.random.rand() < p:`
 `return +1`
 `return -1`

`def T(n, p):`
 `prod=1`
 `for k in range(n+1):`
 `prod=prod*X(p)`
 `return prod`

(b)

`def Esp(n, p, NS=10000):`
 `E=0`
 `for s in range(NS):`
 `E+=T(n, p)`
 `return E/NS`

2. (a) On a

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X = -1) = p - (1 - p) = 2p - 1$$

et, comme $X^2 = 1$,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - (2p - 1)^2 = 4(1 - p)p.$$

(b) Par indépendance des X_k , $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{E}(T_n) = \prod_{k=0}^n \mathbb{E}(X_k) = (2p - 1)^{n+1}.$$

(c) Comme T_n est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, en posant $p_n = \mathbb{P}(T_n = 1)$, on a $1 - p_n = \mathbb{P}(T_n = -1)$ et

$$\mathbb{E}(T_n) = 2p_n - 1$$

Donc il vient que

$$p_n = \frac{1}{2}(1 + (2p - 1)^{n+1}).$$

3. On cherche à déterminer cette loi par une autre méthode. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(T_n = 1)$.

(a) En considérant le SCE $([X_{n+1} = 1], [X_{n+1} = -1])$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}([T_{n+1} = 1] \cap [X_{n+1} = 1]) + \mathbb{P}([T_{n+1} = 1] \cap [X_{n+1} = -1]) \\ &= \mathbb{P}([T_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1]) + \mathbb{P}([T_n = -1] \cap [X_{n+1} = -1]) \\ (\text{indép.}) &= \mathbb{P}(T_n = 1)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(T_n = -1)\mathbb{P}(X_{n+1} = -1) \\ &= p_n p + (1 - p_n)(1 - p) \\ &= (2p - 1)p_n + (1 - p) \end{aligned}$$

(b) La suite (p_n) est arithmético-géométrique. La raison est $(2p - 1)$. Le point fixe α vérifie $\alpha = (2p - 1)\alpha + (1 - p)$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$ (on suppose $p \neq 1$).

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = (2p - 1)^n(p_0 - \alpha) + \alpha$$

Sachant que $p_0 = p$, on retrouve bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{2}((2p - 1)^{n+1} + 1).$$

On a donc

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{2}((2p - 1)^{n+1} + 1) \quad ; \quad \mathbb{P}(T_n = -1) = \frac{1}{2}(-(2p - 1)^{n+1} + 1).$$

Enfin : $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{P}(T_n = 1) - \mathbb{P}(T_n = -1) = (2p - 1)^{n+1}$.

4. Soit N une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $m \in \mathbb{N}^*$ et $q \in]0, 1[$, indépendante des X_k .

On définit $T = T_N = \prod_{k=0}^N X_k$ et on admet qu'il s'agit d'une variable aléatoire.

(a) La variable aléatoire T est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, calculons $\mathbb{P}(T = 1)$ en conditionnant sur les valeurs de N : la famille d'événements $(N = n)_{n \in \llbracket 1, m \rrbracket}$

est un SCE et on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = 1) &= \sum_{n=0}^m \mathbb{P}(T = 1, N = n) \\ &= \sum_{n=0}^m \mathbb{P}(T_n = 1, N = n) \\ (\text{indép.}) &= \sum_{n=0}^m \mathbb{P}(T_n = 1) \mathbb{P}(N = n)\end{aligned}$$

De même,

$$\mathbb{P}(T = -1) = \sum_{n=0}^m \mathbb{P}(T_n = -1) \mathbb{P}(N = n)$$

et finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) = \mathbb{P}(T = 1) - \mathbb{P}(T = -1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(T_n = 1) - \mathbb{P}(T_n = -1)) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^m \mathbb{E}(T_n) \mathbb{P}(N = n).\end{aligned}$$

(b) On sait que $\mathbb{E}(T_n) = (2p - 1)^{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=0}^m (2p - 1)^{n+1} \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} q^n (1 - q)^{m-n} (2p - 1)^{n+1} \\ &= (2p - 1) \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (q(2p - 1))^n (1 - q)^{m-n} \\ &= (2p - 1) (q(2p - 1) + 1 - q)^m \quad (\text{par le binôme de Newton}).\end{aligned}$$

Ensuite, on raisonne comme pour T_n : On a

$$\mathbb{E}(T) = 2\mathbb{P}(T = 1) - 1$$

et donc

$$\mathbb{P}(T = 1) = \frac{\mathbb{E}(T) + 1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(T = -1) = 1 - \mathbb{P}(T = 1).$$

Exercice 8. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. On vérifie que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_{3,3}$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Par définition de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Par définition de la matrice de f dans la base canonique, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, la i -ième colonne de A correspond aux coordonnées de $f(e_i)$ dans la base canonique. Ainsi :

$$f(e_1) = (2, -1, -1) \quad ; \quad f(e_2) = (1, -1, 0) \quad ; \quad f(e_3) = (2, -1, -1).$$

Par linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(2, -1, -1) + y(1, -1, 0) + z(2, -1, -1) \\ &= (2x + y + 2z, -x - y - z, -x - z). \end{aligned}$$

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(f) &\iff f(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \text{Vect}((-1, 0, 1))$.

La famille $((-1, 0, 1))$ est génératrice de $\ker(f)$ et comme elle n'est constituée que d'un vecteur qui est non nul, elle est libre. Ainsi c'est une base de $\ker(f)$ et $\dim(\ker(f)) = 1$.

Par le théorème du rang :

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}((2, -1, -1), (1, -1, 0), (2, -1, -1)) \\ &= \text{Vect}((2, -1, -1), (1, -1, 0)). \end{aligned}$$

La famille $((2, -1, -1), (1, -1, 0))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$ et de cardinal $2 = \dim(\text{Im}(f))$ donc c'est une base de $\text{Im}(f)$.

4. (a) D'après la première question A^2 possède trois colonnes identiques et non nulles donc elle est de rang 1.

Or on sait que A^2 est la matrice représentative de f^2 dans la base canonique donc

$$\dim(\text{Im}(f^2)) = \text{rg}(A^2) = 1.$$

(b) Soit $(x, y, z) \in \text{Im}(f^2)$: il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y, z) = f^2(a, b, c)$.

Ainsi :

$$f(x, y, z) = f^3(a, b, c) = (0, 0, 0)$$

car f^3 l'application nulle (car $A^3 = 0$).

(c) D'après les questions précédentes on sait que

$$\text{Im}(f^2) \subset \ker(f)$$

$$\dim(\text{Im}(f^2)) = 1 = \dim(\ker(f)).$$

Ainsi $\text{Im}(f^2) = \ker(f)$.

5. Le but de cette question est de montrer que $\text{Im}(f^2) = \ker(f)$ par une autre méthode.

(a) D'après la question 2, on a

$$f^2(e_1) = f^2(e_2) = f^2(e_3) = (1, 0, -1).$$

(b) On en déduit comme à la question 3 que :

$$\text{Im}(f^2) = \text{Vect}(1, 0, -1)$$

puis que $\text{Im}(f^2) = \ker(f)$ par la question 3 également.

6. (a) Le cardinal de la famille $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est égal à $3 = \dim(R^3)$. Il suffit donc de justifier que $\mathcal{B}'$ est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + bf(e_1) + cf^2(e_1) = 0$ (*). En appliquant f^2 et compte tenu du fait que $f^3 = f^4 = 0$ on a :

$$0 = af^2(e_1) + bf^3(e_1) + cf^4(e_1) = af^2(e_1)$$

et comme $f^2(e_1) \neq (0, 0, 0)$ on en déduit $a = 0$.

On a donc $bf(e_1) + cf^2(e_1) = 0$ (*) et en appliquant f :

$$0 = bf^2(e_1) + cf^3(e_1) = bf^2(e_1)$$

qui permet de conclure $b = 0$.

La relation (*) donne alors $cf^2(e_1) = 0$ donc $c = 0$.

Ainsi $a = b = c = 0$.

La famille $\mathcal{B}'$ est libre et par ce qui précède c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Les coordonnées de $f(e_1)$ dans $\mathcal{B}'$ sont $(0, 1, 0)$: cela donne la première colonne de N .

Les coordonnées de $f(f(e_1)) = f^2(e_1)$ dans $\mathcal{B}'$ sont $(0, 0, 1)$: cela donne la deuxième colonne de N .

Les coordonnées de $f(f^2(e_1)) = f^3(e_1) = (0, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}'$ sont $(0, 0, 0)$: cela donne la troisième colonne de N .

$$\text{Ainsi } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $u \in \mathbb{R}^3$ et notons (a, b, c) ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

Alors

$$u \in \ker(f) \iff N \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0.$$

Ainsi $\ker(f) = \text{Vect}(f^2(e_1)) = \text{Vect}((-1, 0, 1))$.

De même :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f^2(e_1)) = \text{Vect}((2, -1, -1), (1, 0, -1)).$$