

BCPST2 – Mathématiques

DM0

- ★ À rendre le jour de la rentrée au début de la séance de cours. Aucun délai supplémentaire ne sera accordé.
- ★ Le devoir doit être rédigé sur des copies doubles. Les résultats doivent être mis en valeur (encadrés ou soulignés par exemple).

Exercice 1. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x},$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x),$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3+x-2},$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x},$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)e^x.$

Exercice 2.

1. Déterminer une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente.
2. (a) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, calculer l'intégrale $\int_0^x \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} d\theta$ en effectuant le changement de variable $u : \theta \mapsto \cos(\theta)$.
(b) En déduire une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente.
3. Résoudre l'équation différentielle suivante : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad y'(x) + \tan(x)y(x) = 0.$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (1-x)^3 + x.$$

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0.4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Dresser le tableau de variations de f .
(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 4. Déterminer un équivalent simple de chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right).$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - \sqrt{4n^2 + n + 1}.$

Exercice 5. Déterminer le DL des fonctions suivantes en 0.

1. $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad a(x) = -x + \ln(1+x)$ à l'ordre 2.
2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad b(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$ à l'ordre 2.

Exercice 6. Déterminer, à l'aide d'un DL, un équivalent et la limite en 0 de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{x^2}.$$

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On pose $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et on considère par ailleurs $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi que X . On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \prod_{k=0}^n X_k.$$

1. (a) Écrire une fonction Python $T(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ retournant une valeur simulée de la variable T_n , où $n = \mathbf{n}$, $p = \mathbf{p}$.
 (b) Écrire une fonction Python $\text{Esp}(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ retournant une valeur estimée de l'espérance de la variable T_n (on considère toujours que $n = \mathbf{n}$, $p = \mathbf{p}$).
2. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
 (b) En déduire $\mathbb{E}(T_n)$.
 (c) En déduire la loi de T_n .
3. On cherche à déterminer cette loi par une autre méthode. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(T_n = 1)$.
 (a) En considérant le système complet d'événements $([X_{n+1} = 1], [X_{n+1} = -1])$ montrer que

$$p_{n+1} = (2p - 1)p_n + (1 - p).$$

- (b) En déduire p_n et la loi de T_n .
4. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de binomiale de paramètres $m \in \mathbb{N}^*$ et $q \in]0, 1[$, indépendante des X_k . On définit la variable aléatoire $T = T_N = \prod_{k=0}^N X_k$.

- (a) Montrer que

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^m \mathbb{E}(T_n) \mathbb{P}(N = n).$$

- (b) Donner la valeur de $\mathbb{E}(T)$ et en déduire la loi de T .

Exercice 8. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3 .
2. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, expliciter $f(x, y, z)$.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$ ainsi qu'une base de $\text{Im}(f)$.
 En déduire la dimension de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
4. (a) Déterminer le rang de A^2 et en déduire $\dim(\text{Im}(f^2))$.
 (b) Montrer que $\text{Im}(f^2) \subset \ker(f)$.
 (c) En déduire que $\text{Im}(f^2) = \ker(f)$.
5. Le but de cette question est de montrer que $\text{Im}(f^2) = \ker(f)$ par une autre méthode.
 (a) Calculer $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$.
 (b) En déduire une famille génératrice de $\text{Im}(f^2)$ puis que $\text{Im}(f^2) = \ker(f)$.
6. (a) Montrer que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
 (b) Donner la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}'$.
 (c) À l'aide de la matrice N , déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et de $\ker(f)$.