

BCPST2 – Mathématiques

DS1- 3H00

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{e^x - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. D'après le cours :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$ on peut composer :

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}((-x)^3) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

2. D'après ce qui précède :

$$e^x - e^{-x} = 2x + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x.$$

Ainsi par compatibilité des équivalents avec le quotient :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}.$$

En particulier

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0.$$

Donc f est continue en 0.

3. Soit $x \neq 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x}{e^x - e^{-x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}.$$

Cela montre que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

4. Soit $x \neq 0$.

$$f(x) = \frac{x^2}{2x + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} = \frac{x}{2 + \frac{x^2}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) = 0$, on peut composer avec le DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

On sait que :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

Or

$$1 - X + X^2 = 1 - \frac{x^2}{6} + \text{terme d'ordre supérieur.}$$

Donc :

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

Finalement :

$$f(x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

5. Du DL d'ordre 1 en 0, on déduit l'équation réduite de la tangente :

$$y = \frac{x}{2}.$$

Du DL d'ordre 3 en 0, on déduit que la courbe traverse sa tangente (car 3 est impair) : elle est d'abord au dessus puis passe en dessous (car $-\frac{1}{12} < 0$).

Problème

Partie 1—Le modèle logistique discret

On suppose qu'il existe un réel strictement positif M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq M.$$

Dans toute cette partie, on suppose $0 < u_0 < M$ et on pose, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{u_n}{M}.$$

On suppose qu'il existe un réel a tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = av_n(1 - v_n).$$

Le cas $0 < a \leq 1$.

Dans cette partie, on prend $0 < a \leq 1$.

On considère les fonctions f_a et g_a définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_a(x) = ax(1 - x) \quad \text{et} \quad g_a(x) = f_a(x) - x.$$

1. (a) La fonction f_a est polynomiale donc dérivable sur $[0, 1]$ et on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'_a(x) = a(1 - x) - ax = a(1 - 2x).$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$f'_a(x) \geq 0 \iff \frac{1}{2} \geq x \quad \text{avec égalité ssi } x = \frac{1}{2}.$$

On en déduit :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
Signe de $f'_a(x)$	+	0	-
Variation de f_a	0	$\frac{a}{4}$	0

- (b) La fonction g_a est polynomiale donc dérivable sur $[0, 1]$ et on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g'_a(x) = a(1 - x) - ax - 1 = a - 1 - 2ax.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$g'_a(x) < 0 \iff \frac{a-1}{2a} < x.$$

Or comme $a \in]0, 1]$, on a : $\frac{a-1}{2a} \leq 0$ si bien que g'_a est strictement négative sur $[0, 1]$:

x	0	1
Variation de g_a	0	

Comme g_a est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et que $g_a(0) = 0$ alors g_a est négative sur $[0, 1]$.

2. (a) Le tableau de variations de f_a montre que $f_a([0, 1]) = \left]0, \frac{a}{4}\right] \subset]0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $v_n \in]0, 1[$ ».

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Initialisation : d'après l'énoncé $v_0 \in]0, 1[$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in [0, 1]$ donc

$$v_{n+1} = f_a(v_n) \in f_a([0, 1]) = \left]0, \frac{a}{4}\right] \subset]0, 1[.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in]0, 1[.$$

(b) D'après la question précédente et la question 1.b) on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = f_a(v_n) - v_n = g_a(v_n) \leq 0.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

3. (a) D'après les questions précédentes, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Par le théorème de convergence monotone, elle est donc convergente.

On note ℓ sa limite.

(b) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq v_n \leq 1$.

Comme le passage à la limite préserve les inégalités larges, on en déduit : $0 \leq \ell \leq 1$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f_a(v_n)$ et f_a est continue sur $[0, 1]$ donc, en particulier, en ℓ . En passant à la limite on obtient, par unicité de la limite :

$$\ell = f_a(\ell).$$

(c) Soit $x \in [0, 1]$.

$$f_a(x) = x \iff g_a(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{d'après 1.b.}$$

Ainsi on a nécessairement $\ell = 0$.

Cela signifie que la population étudiée finit par s'éteindre.

Le cas $a = 1$ (5/2 ENS).

Dans cette partie, on prend $a = 1$.

4. Soit b un réel non nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1}^b - v_n^b = (v_n(1 - v_n))^b - v_n^b = v_n^b ((1 - v_n)^b - 1).$$

Or d'après la partie précédente, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc par équivalent usuel :

$$v_{n+1}^b - v_n^b = v_n^b ((1 - v_n)^b - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^b \times b(-v_n) = -bv_n^{b+1}.$$

En prenant $b = -1$, on a donc :

$$v_{n+1}^b - v_n^b \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $w_n = v_{n+1}^b - v_n^b$.

5. Soit $1 > \varepsilon > 0$.

D'après la question précédente, $c = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$.

Comme $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n > N_1, \quad |w_n - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui se réécrit :

$$\forall n > N_1, \quad \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq w_n \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

6. On pose $A = \sum_{k=0}^{N_1} w_k$. Soit $n > N_1$. On applique la relation de Chasles

$$\sum_{k=0}^n w_k = A + \sum_{k=N_1+1}^n w_k.$$

Par la question précédente, chacun des $n - N_1$ termes de la seconde somme est compris entre $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ et $1 + \frac{\varepsilon}{2}$ d'où :

$$A + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(n - N_1) \leq \sum_{k=0}^n w_k \leq A + (n - N_1) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Or d'après 2, la suite (v_n) est décroissante et strictement positive donc la suite (v_n^{-1}) est croissante.

En particulier, (w_n) est positive et on a donc $A \geq 0$. Ainsi :

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(n - N_1) \leq \sum_{k=0}^n w_k \leq A + (n - N_1) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq A + n \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

En divisant membre à membre par n on trouve :

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{N_1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n w_k \leq \frac{A}{n} + 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

7. (a) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A}{n} = 0$ donc, comme $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, par définition de la limite :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_2, \quad \left| \frac{A}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, pour tout $n \geq N_2$:

$$\frac{A}{n} \leq \left| \frac{A}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) De même, il existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_3, \quad \frac{N_1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, pour $n \geq N_3$:

$$1 - \frac{N_1}{n} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) Posons $N = \max(N_1 + 1, N_2, N_3)$. D'après les questions précédentes, pour tout $n \geq N$ on a :

$$\begin{aligned} & - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{N_1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n w_k \leq \frac{A}{n} + 1 + \frac{\varepsilon}{2}; \\ & - \frac{A}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}; \\ & - 1 - \frac{N_1}{n} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geq N$:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n w_k \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En remarquant que $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \geq 1 - \varepsilon$ on obtient l'encadrement :

$$\forall n \geq N, \quad 1 - \varepsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n w_k \leq 1 + \varepsilon.$$

8. La question précédente montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n w_k = 1$ d'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

Or, par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0}.$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

Comme $\frac{1}{v_0}$ est négligeable devant $\frac{1}{v_n}$ (car ce dernier tend vers $+\infty$) on obtient

$$\frac{1}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \quad \text{puis} \quad v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Le cas $a = \frac{5}{2}$.

Dans cette partie, on suppose que $a = \frac{5}{2}$ et que $v_0 = \frac{1}{2}$. On note f , g et h les fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \frac{5}{2}x(1-x) \quad ; \quad g(x) = f(x) - x \quad \text{et} \quad h(x) = f \circ f(x) - x.$$

9. On trouve :

$$v_1 = f(v_0) = \frac{5}{8} \quad ; \quad v_2 = f(v_1) = \frac{75}{128} \quad ; \quad v_3 = f(v_2) = \frac{5 \cdot 75 \cdot 53}{2 \cdot 128^2}.$$

10. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de v_n :

```
def v(n):
    v=1/2
    for k in range(n):
        v = 5/2*v*(1-v)
    return v
```

11. (a) Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{5}{2}x(1-x) = x \iff x \left(\frac{5}{2}(1-x) - 1 \right) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2} - \frac{5}{2}x = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Ainsi f admet exactement deux points fixes sur $[0, 1]$: 0 et $\frac{3}{5}$.

(b) Soit $x \in [0, 1]$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} h(x) = f(f(x)) - x &= \frac{5}{2}f(x)(1-f(x)) - x = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}x(1-x) \left(1 - \frac{5}{2}x(1-x) \right) - x \\ &= \frac{25x(1-x)(2-5x(1-x)) - 8x}{8} \\ &= \frac{x(25(1-x)(2-5x(1-x)) - 8)}{8} \end{aligned}$$

avec :

$$25(1-x)(2-5x(1-x)) - 8 = -125x^3 + 250x^2 - 175x + 42.$$

D'autre part, on a :

$$(5x-3)(25x^2-35x+14) = 125x^3-250x^2+175x-42 = -(25(1-x)(2-5x(1-x))-8).$$

Finalement on obtient bien :

$$h(x) = \frac{x(25(1-x)(2-5x(1-x)) - 8)}{8} = -\frac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}.$$

(c) Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x &\iff h(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 5x - 3 = 0 \text{ ou } 25x^2 - 35x + 14 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{5} \text{ ou } 25x^2 - 35x + 14 = 0. \end{aligned}$$

Or le discriminant de $25x^2 - 35x + 14$ vaut $-7 \times 25 < 0$ donc l'équation $25x^2 - 35x + 14 = 0$ n'a pas de solution réelle.

Ainsi les points fixes de $f \circ f$ sont 0 et $\frac{3}{5}$; les mêmes que f d'après 6.a.

- (d) D'après la question précédente, on sait que pour tout $x \in [0, 1]$, $25x^2 - 35x + 14 > 0$.

Le signe de $h(x)$ dépend donc du signe de $-x(5x - 3)$. On en déduit :

x	0		$\frac{3}{5}$
Signe de $h(x)$	0	+	0

12. (a) Soit $x \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, montrons que $f \circ f(x) \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Les variations de f changent en $\frac{1}{2}$ (voir question 1.a qui reste valable). On va donc distinguer deux cas.

— Si $x \in \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$. Par croissance de f sur cet intervalle :

$$\frac{3}{5} = f\left(\frac{2}{5}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}.$$

Or sur l'intervalle $\left[\frac{3}{5}, \frac{5}{8}\right]$, f est décroissante, donc :

$$\frac{75}{128} = f\left(\frac{5}{8}\right) \leq f \circ f(x) \leq f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

Or $\frac{2}{5} < \frac{75}{128} = f\left(\frac{5}{8}\right)$ donc $f \circ f(x)$ appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

— Si $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$. Par décroissance de f sur cet intervalle :

$$\frac{3}{5} = f\left(\frac{3}{5}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}.$$

Or sur l'intervalle $\left[\frac{3}{5}, \frac{5}{8}\right]$, f est décroissante, donc :

$$\frac{75}{128} = f\left(\frac{5}{8}\right) \leq f \circ f(x) \leq f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

Or $\frac{2}{5} < \frac{75}{128} = f\left(\frac{5}{8}\right)$ donc $f \circ f(x)$ appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Finalement, on a bien : $f \circ f\left(\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]\right) \subset \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après les questions précédentes :

$$v_{2(n+1)} - v_{2n} = h(v_{2n}) \geq 0.$$

Ainsi la suite $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- (c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{2(n+1)} = f \circ f(v_{2n})$ en reprenant la méthode de la question 2.a, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n} \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Ainsi, $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. Notons ℓ sa limite.

En raisonnant comme à la question 3.b, on montre que $\ell \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ et est un point fixe de $f \circ f$.

Ainsi $\ell = \frac{3}{5}$.

- (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{2n+1} = f(v_{2n}).$$

Par continuité de f en $\frac{3}{5}$, on en déduit que $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

- (e) Les suites $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $\frac{3}{5}$ donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers cette limite également.

13. La population initiale u_0 est $\frac{M}{2}$ et la population vers $\frac{3}{5}M$ soit 120% de sa taille initiale.

Partie 2—Le modèle logistique continu

Dans cette partie, on modélise l'évolution de la population par une fonction. La taille de la population à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est représentée par le réel $y(t)$ où y désigne une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

On suppose que la taille de la population est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif M tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < y(t) < M.$$

On suppose que y est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) = ay(t)(M - y(t)).$$

14. (a) En mettant le membre de droite au même dénominateur et en identifiant les numérateurs des deux membres, on trouve $\alpha = \beta = \frac{1}{M}$. Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $y(t)$ et $M - y(t)$ sont non nuls donc en divisant l'équation initiale par $y(t)(M - y(t))$ on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad y'(t) = ay(t)(M - y(t)) &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{y'(t)}{y(t)(M - y(t))} = a \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \alpha \frac{y'(t)}{y(t)} + \beta \frac{y'(t)}{M - y(t)} = a. \end{aligned}$$

Ainsi y vérifie l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \frac{y'(t)}{y(t)} + \beta \frac{y'(t)}{M - y(t)} - a = 0.$$

(b) Une primitive est donnée par :

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \alpha \ln(|y(t)|) - \beta \ln|M - y(t)| - at.$$

Mais par hypothèse on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}_+ : 0 < y(t) < M$ d'où on déduit la primitive suivante :

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \alpha \ln(y(t)) - \beta \ln(M - y(t)) - at.$$

15. D'après les questions précédentes, la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \alpha \ln(y(t)) - \beta \ln(M - y(t)) - at$ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc il s'agit d'une fonction constante. Il existe donc un réel d tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \alpha \ln(y(t)) - \beta \ln(M - y(t)) - at = d.$$

En se souvenant que $\alpha = \beta = \frac{1}{M}$ on a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \ln(y(t)) - \ln(M - y(t)) - aMt = Md.$$

En passant à l'exponentielle il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{y(t)}{M - y(t)} e^{-aMt} = e^{Md}.$$

Finalement, si on pose $c = e^{Md}$, en isolant $y(t)$, on trouve bien que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$y(t) = \frac{cMe^{aMt}}{1 + ce^{aMt}}.$$

16. D'après la question précédente $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = M$.

La population croît jusqu'à atteindre son maximum théorique.

Partie 3—Le modèle proies-prédateurs discret

Dans cette partie, on souhaite modéliser l'évolution conjointe de deux populations : une population de lièvres, qui constituent des proies et une population de lynx, qui sont des prédateurs des lièvres.

La population de lièvres est modélisée par une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la population de lynx par une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On fait les hypothèses suivantes

- le taux d'accroissement des proies résulte d'un taux de natalité constant a et d'un taux de mortalité by_n proportionnel au nombre de prédateurs.
- le taux d'accroissement des prédateurs résulte d'un taux de natalité cx_n proportionnel au nombre de proies, et d'un taux de mortalité constant d

où a , b , c et d sont des réels strictement positifs.

On obtient alors les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = (1+a)x_n - by_n x_n \\ y_{n+1} = (1-d)y_n + cx_n y_n \end{cases} \quad (1)$$

17. À un instant n , le taux d'accroissement des proies est : $\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$. D'après les hypothèses :

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = a - by_n$$

et on obtient donc : $x_{n+1} = x_n + x_n(a - by_n) = (1+a)x_n - by_n x_n$. De même le taux d'accroissement des prédateurs est : $\frac{y_{n+1} - y_n}{y_n}$. D'après les hypothèses :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{y_n} = cx_n - d$$

et on obtient donc : $y_{n+1} = y_n + y_n(cx_n - d) = (1-d)y_n + cy_n x_n$.

18. En calculant (x_1, y_1) on remarque que $(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$.

En effet, si $(x_n, y_n) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ alors :

$$x_{n+1} = (1+a)\frac{d}{c} - b\frac{d}{c} \times \frac{a}{b} = \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = (1-d)\frac{a}{b} + c\frac{d}{c} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Les suites (x_n) et (y_n) sont donc constantes.

19. (a) Écrire une fonction Python `Population` qui prend en argument x_0 , y_0 et n , et qui renvoie le couple (x_n, y_n) .

```
def Population(x0, y0, n):
    x = x0
    y = y0
    for k in range(n):
        xold = x # garde en memoire la valeur de xn pour les calculs
        suivants
        x = (1+a)*x-b*x*y
        y = (1-d)*y+c*xold*y
    return (x, y)
```

- (b) Compléter le programme suivant pour qu'il trace la représentation graphique des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ en fonction de $n \in \llbracket 0, 150 \rrbracket$.

```

a,b,c,d = 0.08 , 0.00002 , 0.000008 , 0.5
x0 , y0 = 62000 , 3800

X = [x0]
Y = [y0]

for k in range(1,151):
    X.append(Population(x0,y0,k)[0])
    Y.append(Population(x0,y0,k)[1])

plt.plot(X)
plt.plot(Y)
plt.show()

```

- (c) `import matplotlib.pyplot as plt`

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = x_n - \frac{d}{c}$ et $v_n = y_n - \frac{a}{b}$.

20. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{d}{c} = (1+a)x_n - by_nx_n - \frac{d}{c} \\
 &= (1+a) \left(u_n + \frac{d}{c} \right) - b \left(u_n + \frac{d}{c} \right) \left(v_n + \frac{a}{b} \right) - \frac{d}{c} \\
 &= u_n - bv_nu_n - \frac{bd}{c}v_n.
 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= y_{n+1} - \frac{a}{b} = (1-d)y_n + cy_nx_n - \frac{a}{b} \\
 &= (1-d) \left(v_n + \frac{a}{b} \right) + c \left(u_n + \frac{d}{c} \right) \left(v_n + \frac{a}{b} \right) - \frac{a}{b} \\
 &= v_n + cu_nv_n + \frac{ca}{b}v_n.
 \end{aligned}$$

On pose alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

21. (a) D'après les hypothèses on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - \alpha v_n \\ v_{n+1} &= v_n + \alpha u_n \end{cases}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

- (b) Une récurrence donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

22. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

- (a) Comme $\det(P) = 2i \neq 0$, la matrice P est inversible et son inverse est donné par :

$$P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Un calcul permet de vérifier que $A = P \begin{pmatrix} 1+i\alpha & 0 \\ 0 & 1-i\alpha \end{pmatrix} P^{-1}$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc (à montrer par récurrence si ce n'est pas su !) :

$$A^n = P \begin{pmatrix} (1+i\alpha)^n & 0 \\ 0 & (1-i\alpha)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Un calcul montre alors que :

$$A^n = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i((1+i\alpha)^n + (1-i\alpha)^n) & -(1+i\alpha)^n + (1-i\alpha)^n \\ (1+i\alpha)^n - (1-i\alpha)^n & i((1+i\alpha)^n + (1-i\alpha)^n) \end{pmatrix}.$$

- 23.** On écrit $1+i\alpha$ sous forme exponentielle : il existe $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que :

$$1+i\alpha = re^{i\theta}.$$

Son conjugué $1-i\alpha$ s'écrit alors $re^{-i\theta}$. Les formules d'Euler donnent alors :

$$A^n = \frac{r^n}{2i} \begin{pmatrix} i(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) & -e^{in\theta} + e^{-in\theta} \\ e^{in\theta} - e^{-in\theta} & i(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

La question 16.b permet alors de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n &= r^n(\cos(n\theta)u_0 - \sin(n\theta)v_0) \\ v_n &= r^n(\cos(n\theta)v_0 + \sin(n\theta)u_0) \end{cases}$$