

TP Python – 1

SUITES RÉCURRENTES (5/2)

1 Algorithme de Babylone

Soit $A > 0$. On considère la suite définie par :

$$x_0 \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right).$$

1. (a) Écrire une fonction `Babylone(A, x0=1, n=10)` prenant en arguments un réel $A > 0$, une valeur initiale `x0` et un entier naturel `n`. Cette fonction renverra la liste $[x_0, \dots, x_n]$ des termes de la suite ci-dessus pour $x_0 = \text{x0}$.
- (b) Afficher les 11 premières valeurs de la suite (avec $x_0 = 1$) pour $A \in \{2, 4, 9\}$.
Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite (x_n) ? Le cas échéant, sur la valeur de sa limite?
2. L'algorithme de Babylone est une méthode employée pour calculer « à la main » des racines carrées en calculant les termes successifs de la suite (x_n) .
On suppose qu'il est à l'origine d'une approximation de $\sqrt{2}$ très précise retrouvée sur une tablette babylonienne datant de 1500 ans avant J.C.

- (a) Déterminer le tableau de variations de $x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{A}{x} \right)$.
- (b) On suppose que $x_0 \geq \sqrt{A}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq \sqrt{A}$
En déduire que (x_n) est décroissante puis qu'elle converge.
- (c) On suppose $x_0 \in]0, \sqrt{A}[$. Montrer que (x_n) converge.
- (d) Déterminer la limite de (x_n) lorsque $x_0 > 0$.
- (e) Que se passe-t-il pour $x_0 < 0$?
3. (a) Écrire une fonction `dicho(A, a, b, n)`, prenant en arguments $A > 0$, deux réels $0 < a < b$ tels que $a^2 < A < b^2$ et un entier naturel n , qui donne une valeur approchée de $\sqrt{A}$ obtenue après n étapes de la méthode de dichotomie sur $[a, b]$.
- (b) Justifier que $|\text{dicho}(A, a, b, n) - \sqrt{A}| \leq \frac{|b - a|}{2^n}$.
4. Dans cette question, on prend $A = 2$, $x_0 = 1$ et $a = 1$ et $b = 2$.
 - (a) Écrire une fonction qui prend en argument n et qui renvoie sous forme de listes $(|\text{dicho}(2, 1, 2, k) - \sqrt{2}|)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(|\text{Babylone}(2, 1, k) - \sqrt{2}|)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.
 - (b) Tracer les représentations graphiques des suites ci-dessus.
Quelle méthode est la plus efficace?

5. On suppose $x_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $w_n = \frac{x_n - \sqrt{A}}{x_n + \sqrt{A}}$.

- (a) Montrer : $\forall n \geq 1, w_{n+1} = w_n^2$ et en déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(\frac{x_1 - \sqrt{A}}{x_1 + \sqrt{A}} \right)^{2^{n-1}}$.
- (b) Justifier que $0 \leq \frac{x_1 - \sqrt{A}}{x_1 + \sqrt{A}} < 1$ puis expliquer l'observation de 4.(b).

2 Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode de résolution approchée de solution d'une d'équation du type $f(x) = 0$. Le principe est le suivant :

- on part d'une valeur arbitraire x_0 (pas trop loin de la solution recherchée) ;
- comme $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ on approxime la solution de $f(x) = 0$ par la solution de $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$;
- on itère le procédé.

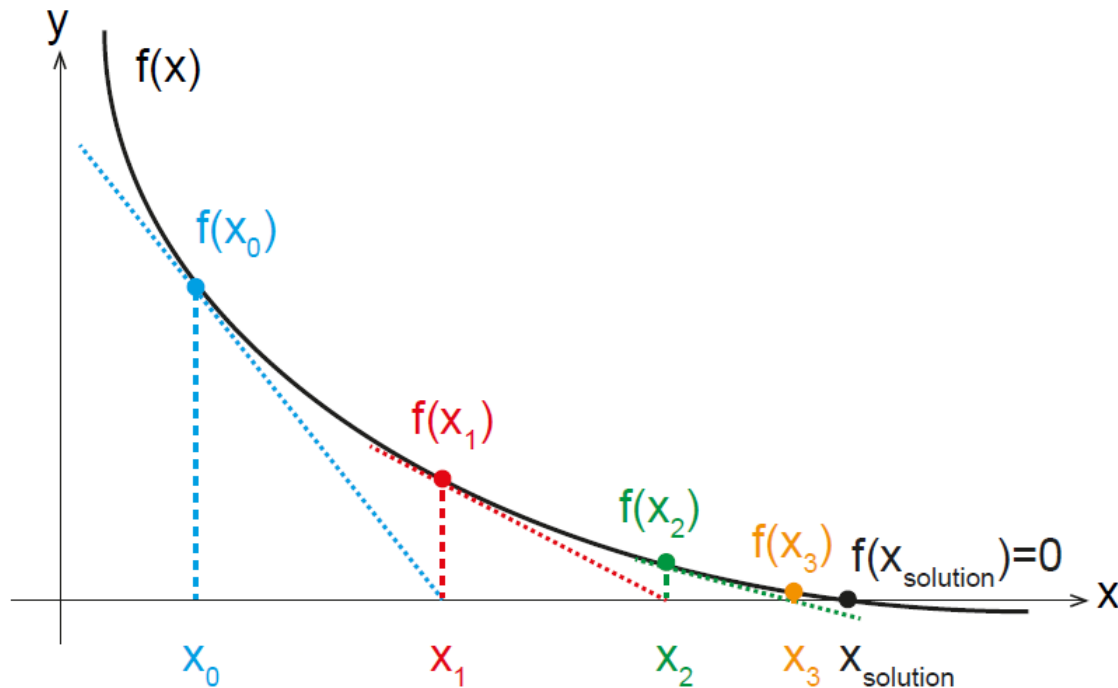


FIGURE 1 – Illustration de la méthode de Newton

On supposera donc qu'il existe une solution de cette équation, notée x_∞ , que f est de classe C^1 sur un voisinage de x_∞ et que f' ne s'annule pas sur un voisinage de x_∞ .

1. Justifier que la suite des valeurs approchées de x_∞ obtenue par cette méthode est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

2. On considère $f : x \mapsto x^2 - A$ où $A > 0$. Expliciter la relation de récurrence dans ce cas. Que retrouve-t-on ?
3. Écrire une fonction `Newton(x0,n)` qui prend en argument une valeur initiale `x0`, un entier naturel `n` et qui renvoie la liste $[x_0, \dots, x_n]$ obtenue par la méthode de Newton (on suppose f et f' préalablement définies).
4. (D'après oral d'Agro) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \frac{3}{3+x}$.

- (a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ possède trois solutions dont une seule est dans $] -1, +\infty[$. On note cette dernière λ .
 - (b) Donner une valeur approchée de λ avec la méthode de Newton.
 - (c) Montrer que les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sont les solutions de $f(x) = 1$.
 - (d) Comparer les valeurs approchées de λ avec la valeur donnée par la commande `eigvals` du module `numpy.linalg`.
5. (**Niveau ENS**) On admettra le résultat suivant : soit f de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$; il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)(b - a)^2}{2}.$$

On considère f de classe C^2 sur $[a, b]$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$ sur $[a, b]$.

On note alors $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

- (a) Justifier que $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[a, b]$ noté λ .
- (b) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe c_x entre x et λ tel que :

$$F(x) - \lambda = \frac{f''(c_x)(x - \lambda)^2}{2f'(x)}.$$

- (c) En déduire l'existence d'un $C > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$:

$$|F(x) - \lambda| \leq C|x - \lambda|^2.$$

- (d) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]) \subset [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$.
En déduire que si $x_0 \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C|x_n - \lambda| \leq (C\varepsilon)^{2^n}.$$

- (e) Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la méthode de Newton par rapport à la méthode de dichotomie ?