

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

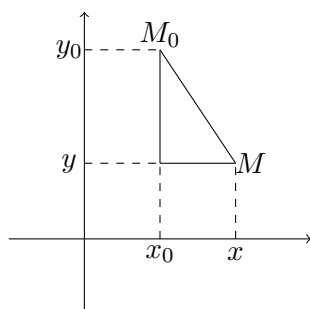
2.1 Généralités sur les fonctions de deux variables

2.1.1 Exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

Rappel(s) 2.1. Étant donnés $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M = (x, y)$ deux points de $\mathbb{R}^2$ la distance entre M_0 et M , notée $d(M_0, M)$, est :

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Il s'agit d'une simple application du théorème de Pythagore (voir la figure suivante).



Définition 2.1 (Disque ouverts/fermés)

Soient $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

- On appelle **disque ouvert de centre A et de rayon r** et on note $D(A, r)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}.$$

- On appelle **disque fermé de centre A et de rayon r** et on note $D_f(A, r)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) \leq r\}.$$

Remarque 2.1.

1. Les disques (ouverts ou fermés) de centre $A \in \mathbb{R}^2$ jouent en dimension deux le rôle de voisinage de A .

2. Le cercle de centre A et de rayon $r > 0$ est l'ensemble :

$$D_f(A, r) \setminus D(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) = r\}.$$

Définition 2.2 (Pavés)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- Le sous-ensemble $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$ est appelé un **pavé**.
- Si les deux intervalles I et J sont ouverts, on parle de **pavé ouvert**.

Exemple 2.1. Faire des dessins.

1. Les ensembles de la forme $]a, b[\times]c, d[$ sont des pavés ouverts.
2. Les ensembles de la forme $[a, b] \times [c, d]$, $[0, 1] \times [0, 1]$ sont des pavés (pas ouverts).

Exemple 2.2. L'intersection de deux pavés (ouverts) est encore un pavé (ouvert) (faire un dessin).

Définition 2.3 (Demi-plans)

Les pavés ouverts de la forme $]a, +\infty[\times \mathbb{R}$, $] - \infty, a[\times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times] - \infty, a[$ et $\mathbb{R} \times]a, +\infty[$ sont appelés des **demi-plans ouverts**.

2.1.2 Fonctions de deux variables

Définition 2.4 (Fonction de deux variables réelles)

On appelle **fonction numérique de deux variables réelles** toute application f définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y). \end{aligned}$$

Exemple 2.3.

1. Les fonctions de la forme suivante sont appelées **des fonctions polynomiales**.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} x^i y^j \end{aligned}$$

avec $A \subset \mathbb{N}^2$ fini.

2. Les fonctions obtenues par composition avec une fonction d'une variable :

- (a) La fonction $(x, y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$ (complémentaire du disque ouvert de rayon 2 et de centre $(0, 0)$);
- (b) La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{xy} - x + 1$.

3. Les fonctions qui ne dépendent que d'une variable :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^{-x} \quad \text{ou} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 + \ln(y^4 + 2).$$

Définition 2.5 (Applications partielles)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- On appelle première **application partielle** de f en (x_0, y_0) et on note $f_{y=y_0}$ l'application

$$x \mapsto f(x, y_0)$$

définie sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in \mathcal{D}\}$

- On appelle deuxième **application partielle** de f en (x_0, y_0) et on note $f_{x=x_0}$ l'application

$$y \mapsto f(x_0, y)$$

définie sur l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in \mathcal{D}\}$.

Exemple 2.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2$. Alors, pour $(x_0, y_0) = (-1, 3)$ on a :

$$f_{y=3} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 9$$

$$f_{x=-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto y^2 + 1.$$

2.1.3 Représentation graphique

Définition 2.6 (Représentation graphique)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. On appelle **graphe** de la fonction f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathcal{D}\}.$$

Exemple 2.5. L'intersection du graphe d'une fonction f avec un plan vertical d'équation $x = x_0$ ou $y = y_0$ donnent, dans ce plan, le graphe de la fonction partielle $f_{x=x_0}$ ou $f_{y=y_0}$ (voir figure ci-dessous).

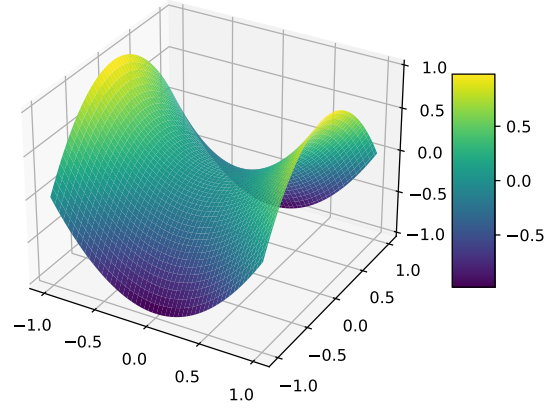
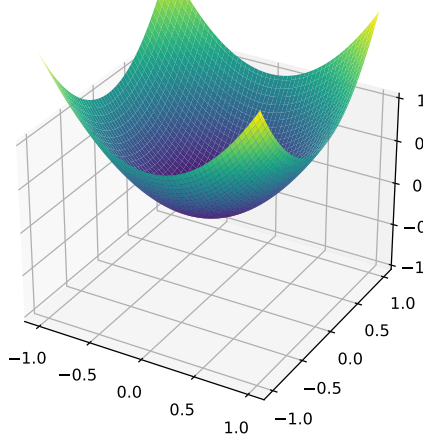


FIGURE 2.1 – $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$. FIGURE 2.2 – $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$.

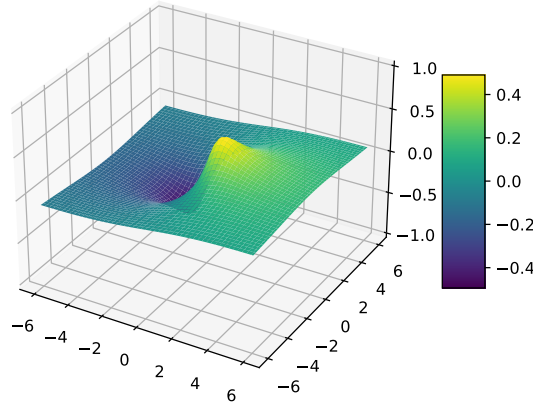


FIGURE 2.3 – $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$.

Définition 2.7 (Ligne de niveau)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $c \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau c de f** le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = c\}.$$

Remarque 2.2. Graphiquement, on regarde l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal d'équation $z = c$ et on projette sur le plan (Oxy) pour obtenir la ligne de niveau c de f .

Exemple 2.6. Lorsque $f(x, y)$ représente :

- une température au point de coordonnées (x, y) , les lignes de niveaux sont les courbes de température constante : les **isothermes** ;

- une pression au point de coordonnées (x, y) , les lignes de niveaux sont les courbes de pression constante : les **isobares** ;
- une altitude au point de coordonnées (x, y) , les lignes de niveaux sont les courbes d'altitude constante.

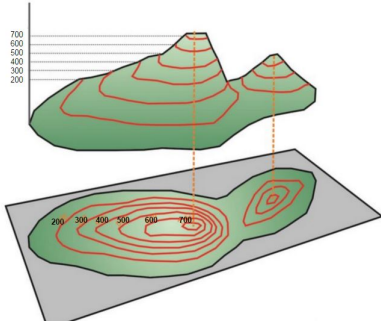


FIGURE 2.4 – Lignes de niveau d'altitude.

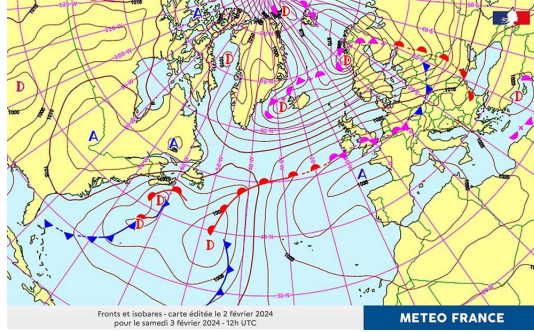


FIGURE 2.5 – Lignes isobares.

Exemple 2.7. On reprend l'exemple de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$.

1. La ligne de niveau -1 de f est l'ensemble vide.
2. La ligne de niveau 0 de f est $\{(0, 0)\}$.
3. La ligne de niveau 1 de f est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 .
4. Plus généralement, la ligne de niveau $c \in \mathbb{R}$ est
 - l'ensemble vide si $c < 0$,
 - $\{(0, 0)\}$ si $c = 0$,
 - le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{c}$ si $c > 0$.

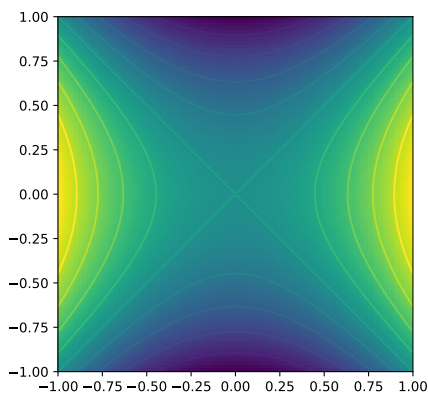
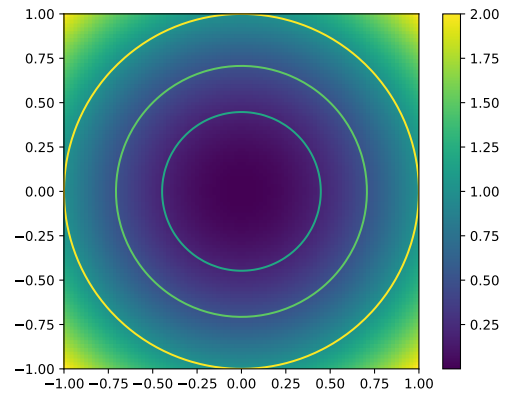

 FIGURE 2.6 – Lignes de niveau de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$.

 FIGURE 2.7 – Lignes de niveau de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$.

2.2 Continuité des fonctions de deux variables

La définition de continuité en un point d'une fonction de deux variables est calquée sur celle des fonctions d'une variable en considérant les boules (ouvertes) centrées en un point comme les voisinages de ce point.

Définition 2.8 (Continuité en un point)

Soit f une fonction numérique de deux variables définie sur un pavé ouvert $I \times J$ et soit $(x_0, y_0) \in I \times J$. On dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0 \exists r > 0 \forall (x, y) \in I \times J, \| (x, y) - (x_0, y_0) \| < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Autrement dit, f est continue en (x_0, y_0) si, pour toute précision arbitrairement petite ϵ , toutes les valeurs $f(x, y)$ de f sont à une distance maximale de ϵ de $f(x_0, y_0)$ pourvu que (x, y) soit suffisamment proche de (x_0, y_0) .

Définition 2.9 (Continuité)

Soit f une fonction de deux variables définie sur un pavé ouvert $I \times J$. On dit que f est **continue sur** $I \times J$ si f est continue en tout point de $I \times J$.

Exemple 2.8 (Admis).

1. Les fonctions polynomiales sont continues.
2. La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions continues sont des fonctions continues.
3. La composée d'une fonction d'une fonction d'une variable continue avec une fonction de deux variable continue est continue.

Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{\ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 - 2xy + y^2 + 1}$.

La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 1$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$. La fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2 + 1)$ est continue sur :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 \in \mathbb{R}_+^*\} = \mathbb{R}^2.$$

La fonction $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x - y)^2 + 1$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$ et ne s'annule pas. Par quotient, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2.3 Dérivées partielles

Dans toute la suite $I \times J$ désigne un pavé ouvert.

2.3.1 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition 2.10 (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soient $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(x_0, y_0) \in I \times J$.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en** (x_0, y_0) si l'application partielle $f_{y=y_0}$ est dérivable en x_0 . Dans ce cas, le nombre dérivé de $f_{y=y_0}$ en x_0 est noté :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou parfois} \quad \partial_1(f)(x_0, y_0).$$

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en** (x_0, y_0) si l'application partielle $f_{x=x_0}$ est dérivable en y_0 . Dans ce cas, le nombre dérivé de $f_{x=x_0}$ en y_0 est noté :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{ou parfois} \quad \partial_2(f)(x_0, y_0).$$

Remarque 2.3. Le fait que I et J soient des intervalles ouverts garantit qu'en tout point $(x_0, y_0) \in I \times J$, les applications partielles $f_{x=x_0}$ et $f_{y=y_0}$ sont définies sur des intervalles non vides non réduits à un point.

Définition 2.11

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** et on note $\frac{\partial f}{\partial x}$ la fonction :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : I \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_1(f)(x, y). \end{aligned}$$

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** et on note $\frac{\partial f}{\partial y}$ la fonction :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} : I \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_2(f)(x, y). \end{aligned}$$

Méthode 2.1

D'un point de vue pratique, pour calculer les dérivées partielles d'une fonction f , on laisse tomber les indices (x_0 devient x , y_0 devient y). Pour dériver une « formule » par rapport à x , on considère que y est constant (non variable donc) et on dérive, comme d'habitude, la formule de la seule variable réelle restante (x).

Exemple 2.9.

1. Soit f définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction partielle $x \mapsto y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1$ de la variable x est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto -2y^2 + 6xy^2$.

Ainsi f admet en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à la première variable et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2y^2 + 6xy^2.$$

- De même, f admet en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 4xy + 6x^2y.$$

2. Soit g définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction partielle $y \mapsto e^{x^2+y^2}$ de la variable y est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $y \mapsto 2ye^{x^2+y^2}$.

Ainsi g admet en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

- De même, g admet en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à la première variable et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2+y^2}.$$

Définition 2.12 (Fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$)

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est de **classe C^1 sur $I \times J$** si elle admet des dérivées partielles sur $I \times J$ et que les dérivées partielles sont continues sur $I \times J$.

Exemple 2.10. 1. Les fonctions polynomiales sont C^1 sur leur ensemble de définition.

2. La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions de classe C^1 sont des fonctions de classe C^1 .
3. La composée d'une fonction d'une fonction d'une variable de classe C^1 avec une fonction de deux variables de classe C^1 est de classe C^1 .

Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{\ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 - 2xy + y^2 + 1}$.

La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 1$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. La fonction logarithme est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2 + 1)$ est de classe C^1 sur :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 \in \mathbb{R}_+^*\} = \mathbb{R}^2.$$

La fonction $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x - y)^2 + 1$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et ne s'annule pas. Par quotient, la fonction f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.1 (Développement limité d'ordre 1)

Soient $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^1 sur $I \times J$ et $(x_0, y_0) \in I \times J$. Alors on a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}(\|(h, k)\|).$$

Cette expression est appelée **développement limité d'ordre 1 de f en (x_0, y_0)** et est unique.

Preuve : (Exercice pour les plus avancés)

Remarquons dans un premier temps que comme $I \times J$ est un pavé ouvert, quitte à prendre h et k suffisamment petit, $(x_0 + h, y_0 + k)$ est bien un élément de $I \times J$.

Soit $g : (h, k) \mapsto f(x_0 + h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$.

Il s'agit de prouver que $g(h, k) - g(0, 0) = o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}(\|(h, k)\|)$ c'est-à-dire :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{g(h, k) - g(0, 0)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

1. (a) Justifier qu'il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $(h, k) \in D((0, 0), r_1)$, $\left| \frac{\partial g}{\partial h}(h, k) \right| \leq \varepsilon'$.
 (b) Justifier qu'il existe $r_2 > 0$ tel que pour tout $(h, k) \in D((0, 0), r_2)$, $\left| \frac{\partial g}{\partial k}(h, k) \right| \leq \varepsilon'$.
2. On pose $r = \frac{\min(r_1, r_2)}{2}$.
 (a) Montrer que pour tout $h \in [-r, r]$, $|g'_{k=0}(h)| \leq \varepsilon'$.
 En déduire : $\forall h \in [-r, r], |g(h, 0) - g(0, 0)| \leq \varepsilon'|h|$.
 (b) Soit $h \in [-r, r]$. Montrer que pour tout $k \in [-r, r]$, $|g'_h(k)| \leq \varepsilon'$.
 En déduire : $\forall k \in [-r, r], |g(h, k) - g(h, 0)| \leq \varepsilon'|k|$.
3. (a) Montrer que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, $|h| + |k| \leq \sqrt{2}\|(h, k)\|$.
 (b) En déduire que pour tout $(h, k) \in D((0, 0), r)$, $\|g(h, k) - g(0, 0)\| \leq \varepsilon\|(h, k)\|$.
 (c) Conclure.

□

Remarque 2.4.

1. De manière équivalente, le développement limité en (x_0, y_0) s'écrit aussi :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)}(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

2. Graphiquement, l'équation $z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ est l'équation du plan tangent au graphe de f au point de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Définition 2.13 (Gradient)

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles en $(x_0, y_0) \in I \times J$.

On appelle **gradient de f en (x_0, y_0)** le vecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, noté $\nabla(f)(x_0, y_0)$ (se lit "nabla"), défini par :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.5. Graphiquement, la direction du gradient de f en un point (x_0, y_0) est la direction de plus forte variation de f .

Théorème 2.0

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et x, y deux fonctions de dérivables sur un intervalle T et à valeurs dans I et J respectivement. Alors la fonction $h : T \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in T, \quad h(t) = f(x(t), y(t))$$

est dérivable sur T et :

$$\forall t \in T, \quad h'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Preuve : Soit $t \in T$ et écrivons le DL de f en $(x(t), y(t))$:

$$\begin{aligned} h(t+h) &= f(x(t+h), y(t+h)) \\ &= h(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot (x(t+h) - x(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot (y(t+h) - y(t)) + \text{reste} \end{aligned}$$

où

$$\text{reste} = o_{h \rightarrow 0}(\|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))\|).$$

En effectuons maintenant les DL d'ordre 1 de x et y en t :

$$x(t+h) = x(t) + x'(t)h + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

$$y(t+h) = y(t) + y'(t)h + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

Il vient

$$\begin{aligned} h(t+h) &= h(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t)h + o(h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot (y'(t)h + o(h)) + \text{reste} \\ &= h(t) + \left(x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right) h + o(h) + \text{reste} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \text{reste} &= o(\|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))\|) \\ &= o(\|(x'(t)h + o(h), y'(t)h + o(h))\|) \\ &= o(h). \end{aligned}$$

□

Exemple 2.11. Dans le cas où $t \mapsto (x(t), y(t))$ est à valeurs dans une ligne de niveau de f , le vecteur $v(t) = (x'(t), y'(t))$ est un vecteur tangent à la courbe de niveau au point $(x(t), y(t))$. Comme $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est constant (par définition d'une ligne de niveau), on obtient :

$$\forall t \in T, \quad \langle v(t), \nabla(f)(x(t), y(t)) \rangle = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0.$$

La gradient est orthogonal aux lignes de niveaux.

2.3.2 Fonctions de classe C^2

Définition 2.14 (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles d'ordre 1.

On dit que f admet des **dérivée partielle d'ordre 2** sur $I \times J$ si

- f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $I \times J$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admettent des dérivées partielles sur $I \times J$.

Dans ce cas, on note :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial y}. \end{aligned}$$

On dit que f est **de classe C^2** sur $I \times J$ si, de plus, les quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur $I \times J$.

Exemple 2.12. 1. Les fonctions polynomiales sont C^2 sur leur ensemble de définition.

2. La somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions de classe C^2 sont des fonctions de classe C^2 .
3. La composée d'une fonction d'une fonction d'une variable de classe C^2 avec une fonction de deux variables de classe C^2 est de classe C^2 .

Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{\ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 - 2xy + y^2 + 1}$.

La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 1$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. La fonction logarithme est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2 + 1)$ est de classe C^2 sur :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 \in \mathbb{R}_+^*\} = \mathbb{R}^2.$$

La fonction $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x - y)^2 + 1$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et ne s'annule pas. Par quotient, la fonction f est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.13.

1. Soit $f_1 : (x, y) \mapsto y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1$. Cette fonction est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = -2y^2 + 6xy^2 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 4xy + 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) = 6y^2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}(x, y) = -4y + 12xy \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) = 6y - 4x + 6x^2.$$

2. Soit $f_2 : (x, y) \mapsto e^x \sin(xy)$.

Les fonctions $(x, y) \mapsto xy$ et $(x, y) \mapsto x$ sont polynomiales donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Par composition avec les fonctions $\sin$ et $\exp$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ puis par produit, on en déduit que f_2 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = e^x(\sin(xy) + y \cos(xy)) \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = x e^x \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, y) = e^x(\sin(xy) + 2y \cos(xy) - y^2 \sin(xy)) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x, y) = -x^2 e^x \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}(x, y) = e^x((x+1) \cos(xy) - xy \sin(xy)).$$

3. Soit $f_3 : (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$.

Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $x \mapsto e^x$ sont de classe C^2 donc par composition f_3 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = 2x e^{x^2+y^2} \quad ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = 2y e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(x, y) = 2(1 + 2x^2) e^{x^2+y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(x, y) = 2(1 + 2y^2) e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xy e^{x^2+y^2}.$$

Théorème 2.0 (de Schwarz)

Soit f une fonction de classe C^2 sur $I \times J$. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Preuve : Exercice facultatif pour les plus avancés

Soit $(x_0, y_0) \in I \times J$ et $h > 0, k > 0$ tels que $[x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + k] \subset I \times J$.

On note $\delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$.

1. Exprimer $\delta(h, k)$ à l'aide de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$.

2. En déduire l'existence de $\theta_1 \in]0, 1[$ tel que :

$$\delta(h, k) = h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0) \right).$$

3. En considérant $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y)$ montrer l'existence de $\theta_2 \in]0, 1[$ tel que :

$$\delta(h, k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k).$$

4. En considérant maintenant $\psi : y \mapsto f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$ montrer de même l'existence de $\theta_3, \theta_4 \in]0, 1[$ tels que

$$\delta(h, k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k).$$

5. Conclure que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

□

2.4 Extrema des fonctions de deux variables

Définition 2.15 (Maximum, minimum)

Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet un **minimum local** en $(x_0, y_0) \in D$ s'il existe un pavé ouvert $I \times J$ contenant (x_0, y_0) tel que :

$$\forall (x, y) \in (I \times J) \cap D \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Le minimum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in D$.

- On dit que f admet un **maximum local** en $(x_0, y_0) \in D$ s'il existe un pavé ouvert $I \times J$ contenant (x_0, y_0) tel que :

$$\forall (x, y) \in (I \times J) \cap D \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Le maximum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in D$.

Remarque 2.6.

- Un minimum/ maximum global est toujours local mais la réciproque est fausse.
- Une fonction n'admet pas nécessairement de minimum ou de maximum (qu'il soit local ou global).
- Un maximum/minimum (qu'il soit local ou global) n'est pas nécessairement unique.

Exemple 2.14. Soit f la fonction définie sur U par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

où U est une partie de $\mathbb{R}^2$

- On prend $U = \mathbb{R}^2$.

La fonction f admet un minimum global en $(0, 0)$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0).$$

La fonction f n'admet aucun maximum. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ non nul on a :

$$f(2x, 2y) = 4f(x, y) > f(x, y).$$

- On prend $U = B_f((0, 0), 1)$.

La fonction f admet un minimum global en $(0, 0)$. La fonction f admet un maximum global en $(1, 0)$.

En effet, pour tout $(x, y) \in B_f((0, 0), 1)$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1 = f(1, 0).$$

Il n'y a pas unicité du maximum : tout point de la sphère de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 est un maximum global.

Proposition 2.2 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum)

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un **pavé ouvert** $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in I \times J$.

Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Preuve : Soit $h > 0$ et $k > 0$ tels que $]x_0 - h, x_0 + h[\times]y_0 - k, y_0 + k[\subset I \times J$.

Comme f admet un extremum en (x_0, y_0) , la fonction $g : t \in]-h, h[\mapsto f(x_0 + t, y_0)$ admet un extremum en 0 donc :

$$0 = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

En considérant de même $t \in]-k, k[\mapsto f(x_0, y_0 + t)$ on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

□

Remarque 2.7. Il s'agit d'une condition nécessaire et non suffisante : considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy.$$

Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Donc : $\nabla(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En revanche, f n'a pas de minimum local $(0, 0)$ car :

$$\forall r > 0, \quad f(-r, r) = -r^2 < f(0, 0).$$

Elle n'a pas non plus de maximum local car :

$$\forall r > 0, \quad f(r, r) = r^2 > f(0, 0).$$

Définition 2.16 (Point critique)

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in I \times J$.

On dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f si $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 2.8. Autrement dit, les extrema sont à rechercher parmi les points critiques.

Méthode 2.2 (Étude des extremas)

Étant donnée une fonction f définie sur un pavé ouvert $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$.

1. On cherche les points critique en résolvant le système de deux inconnues à deux équations $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Attention, ce système n'est en général pas linéaire ! Attention aussi : un point critique n'est pas nécessairement un extremum !

2. Pour chaque point critique (x_0, y_0) trouvé, on étudie $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ pour déterminer si elle est de signe constant ou non.

Cette partie, en général guidée, consiste souvent à faire apparaître des carrés par des factorisations plus ou moins astucieuses.

Exemple 2.15. Étude de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$.

Il s'agit d'une fonction polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 4.$$

Ainsi l'unique point critique de f est $(1, 2)$. Comme $\mathbb{R}^2$ est un pavé ouvert, si f possède un extremum, c'est nécessairement en $(1, 2)$.

Or, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(1, 2) &= x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 - (-4) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 5 \\ &= (x - 1)^2 - 1 + y^2 - 4y + 5 \\ &= (x - 1)^2 + y^2 - 4y + 4 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 2)^2. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq f(1, 2)$.

La fonction f possède un minimum global en $(1, 2)$ qui vaut $f(1, 2) = -4$.

Méthode 2.3 (Déterminer si un extremum est global)

On considère une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

- Pour montrer que f possède un maximum global (resp. minimum global) en $(x_0, y_0) \in U$, il faut montrer que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$) pour tout $(x, y) \in U$ (voir l'exemple précédent).
- Pour montrer que f n'a pas d'extremum global, l'énoncé suggère parfois de considérer deux fonctions g et h d'une variable telles que $t \mapsto f(g(t), h(t))$ possède une limite infinie ($-\infty$ pour contredire un minimum et $+\infty$ pour contredire un maximum).

Exemple 2.16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = xy^3 - x^2 - 3y^2 + 2xy + 1$. Montrons que f ne possède pas d'extremum global en considérant $y \mapsto f(1, y)$.

1. Supposons par l'absurde que f possède un maximum global en un point (x_0, y_0) .

On note $M = f(x_0, y_0)$. Alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \leq M.$$

En particulier,

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(1, y) \leq M.$$

Or $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(1, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^3 - 3y^2 + 2y = +\infty$. Absurde !

Ainsi, f ne possède pas de maximum global.

2. Supposons par l'absurde que f possède un minimum global en un point (x_0, y_0) .

On note $m = f(x_0, y_0)$. Alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq m.$$

En particulier,

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(1, y) \geq m.$$

Or $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(1, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^3 - 3y^2 + 2y = -\infty$. Absurde !

Ainsi, f ne possède pas de minimum global.

Preuve de la proposition 2.1

Remarquons dans un premier temps que comme $I \times J$ est un pavé ouvert, quitte à prendre h et k suffisamment petit, $(x_0 + h, y_0 + k)$ est bien un élément de $I \times J$.

Soit $g : (h, k) \mapsto f(x_0 + h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$.

Il s'agit de prouver que $g(h, k) - g(0, 0) = o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}(\|(h, k)\|)$ c'est-à-dire :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{g(h, k) - g(0, 0)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

1. (a) Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en (x_0, y_0) , il existe $r_1 > 0$ tel que :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x_0 + h, y_0 + k) - (x_0, y_0)\| < r_1 \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon'.$$

Cela se réécrit :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(h, k)\| < r_1 \implies \left| \frac{\partial g}{\partial h}(h, k) \right| < \varepsilon'.$$

- (b) De même, il existe $r_2 > 0$ tel que :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(h, k)\| < r_2 \implies \left| \frac{\partial g}{\partial k}(h, k) \right| < \varepsilon'.$$

2. On pose $r = \frac{\min(r_1, r_2)}{2}$.

- (a) Par définition des dérivées partielles et d'après ce qui précède :

$$\forall h \in [-r, r], \quad |g'_{k=0}(h)| = \left| \frac{\partial g}{\partial h}(h, 0) \right| < \varepsilon'$$

Donc d'après l'inégalité des accroissement finis appliquée à $g_{k=0}$ donne :

$$\forall h \in [-r, r], \quad |g_{k=0}(h) - g_{k=0}(0)| = |g(h, 0) - g(0, 0)| \leq \varepsilon' |h|.$$

- (b) Par définition des dérivées partielles et comme $[-r, r/2]^2 \subset D((0, 0), r)$ on a

$$\forall k \in [-r, r], \quad |g'_h(k)| = \left| \frac{\partial g}{\partial k}(h, k) \right| < \varepsilon'.$$

Donc d'après l'inégalité des accroissement finis appliquée à g_h on a :

$$\forall k \in [0, r/2], \quad |g_h(k) - g_h(0)| = |g(h, k) - g(h, 0)| \leq \varepsilon' |k|.$$

3. (a) Par définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned} |h| + |k| &= \langle (|h|, |k|), (1, 1) \rangle = \|(|h|, |k|)\| \times \|(1, 1)\| \times \cos(\angle (|h|, |k|), (1, 1)) \\ &\leq \|(1, 1)\| \times \|(|h|, |k|)\| \\ &= \sqrt{2} \|(h, k)\|. \end{aligned}$$

(b) Soit (h, k) tels que $\|(h, k)\| \leq r$. Par les questions précédentes on a :

$$\begin{aligned} |g(h, k) - g(0, 0)| &= |g(h, k) - g(h, 0) + g(h, 0) - g(0, 0)| \leq |g(h, k) - g(h, 0)| + |g(h, 0) - g(0, 0)| \\ &\leq \varepsilon'(|h| + |k|) \\ &\leq \varepsilon'\sqrt{2}\|(h, k)\| = \varepsilon\|(h, k)\| \end{aligned}$$

(c) Ainsi on a prouvé :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \quad \|(h, k)\| < r \iff \frac{|g(h, k) - g(0, 0)|}{\|(h, k)\|} \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(h, k) - g(0, 0)}{\|(h, k)\|} = 0.$$