

SÉRIES NUMÉRIQUES

3.1 Séries numériques

3.1.1 Définition et propriétés

Définition 3.1 (Série numérique)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

On appelle **série numérique de terme général** u_n et on note $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la suite

$(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

La suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ est aussi appelée **la suite des sommes partielles** de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

Définition 3.2 (Série convergente, série divergente)

En conservant les notations de la définition précédente. On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$

- **diverge** si la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ diverge ;
- **converge** si la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge. Dans ce cas, sa limite est appelée la **somme de** $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Exemple 3.1.

1. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ est la suite $\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)_{n \geq 0}$ est convergente. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

La suite des sommes partielles $\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)_{n \geq 0}$ est convergente de limite 2. Ainsi la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2.$$

2. La série $\sum_{n \geq 0} n$ la suite $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)_{n \geq 0}$ et est donc divergente.

Exemple 3.2 (Séries télescopiques).

1. Étudions la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente à l'aide d'un télescopage.

— (**Classique !**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

— La suite des sommes partielles converge vers 1 donc la série est convergente et sa somme vaut 1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2. Plus généralement, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Alors

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \iff \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge.}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par télescopage :

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Remarque 3.1.

- Les séries étant des suites particulières, toutes les techniques d'étude de ces dernières peuvent s'appliquer aux séries.
- On ne change pas la nature (convergente ou divergente) d'une série si on modifie, ajoute ou retire un nombre **fini** de termes.

En particulier, $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ sont de même nature.

Attention cependant, en cas de convergence, la valeur de la somme change !

3. Il ne faut pas confondre les notations :

— $\sum_{n \geq n_0} u_n$ qui désigne **une suite** ;

— $\sum_{k=n_0}^n u_k$ qui désigne un **terme** de la suite ci-dessus ;

— $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ qui désigne, en cas de convergence, la **limite** de la suite ci-dessus.

Proposition 3.1 (HP)

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série numérique.

Si la série est convergente alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

Preuve : Supposons que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une série numérique convergente et notons ℓ sa somme (*i.e.* sa limite).

Alors, pour tout $n > n_0$, on a :

$$u_n = \sum_{k=n_0}^n u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0.$$

□

Remarque 3.2.

1. **Attention : la réciproque est fautive !** On peut avoir $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ divergente : c'est le cas par exemple pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ (voir le paragraphe suivant).
2. C'est surtout la contraposée qui est utile : si (u_n) ne converge pas vers 0 alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est divergente (on dit alors qu'elle est *grossièrement divergente*).

Exemple 3.3. La série $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est divergente car :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0.$$

Proposition 3.2

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries numériques et soit λ, μ deux réels.

Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ convergent alors la série $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

Preuve : Supposons que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ convergent et soit λ, μ deux réels.

Pour tout $n \geq n_0$ on a par linéarité des sommes finies :

$$\sum_{k=n_0}^n (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^n u_k + \mu \sum_{k=n_0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

Cela prouve que $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

□

Remarque 3.3.

1. Lorsque $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge alors la série $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ diverge dès que $\lambda \neq 0$.
2. Lorsque $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ divergent, on ne peut en général pas conclure sur la nature de $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$.

3.1.2 Exemples de référence

Proposition 3.3 (Séries de Riemann)

1. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
2. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Preuve : Cette preuve illustre la technique dite de *comparaison série /intégrale* qui consiste à ramener l'étude de la série à l'étude d'une intégrale.

Pour $a \in \{1, 2\}$, on note $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ et on considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(t) = \frac{1}{t^a}.$$

1. La fonction f est décroissante : elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$ on a

$$f'(t) = -at^{-a-1} < 0.$$

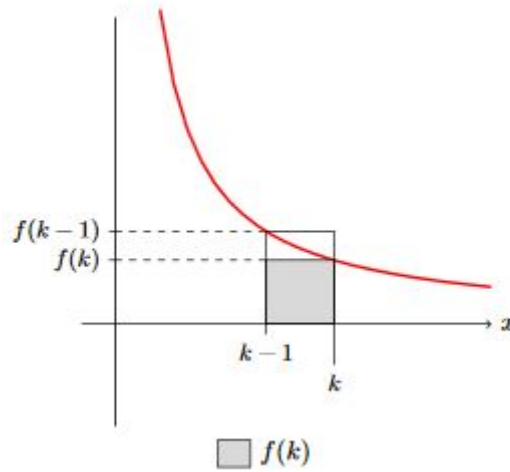
2. Pour tout $k \geq 2$ on a : $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$.

En effet soit $k \geq 2$. Pour tout $t \in [k-1, k]$ on a par décroissance de f :

$$f(k-1) \geq f(t) \geq f(k).$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant), on obtient :

$$f(k-1) = \int_{k-1}^k f(k-1) dt \geq \int_{k-1}^k f(t) dt \geq \int_{k-1}^k f(k) dt = f(k).$$



3. En sommant ces inégalités pour tout $k = 2, \dots, n$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k-1)$$

et, en utilisant la relation de Chasles

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k-1).$$

Finalement, on obtient, pour tout $n \geq 2$:

$$S_n - 1 \leq \int_1^n f(t) dt \leq S_{n-1}.$$

4. On sait que $\int_1^n f(t) dt = \begin{cases} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^n & \text{si } a = 2 \\ \left[\ln(t) \right]_1^n & \text{si } a = 1 \end{cases}$

— Pour $a = 2$, on a donc

$$S_n \leq \int_1^n f(t) dt + 1 = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est donc majorée. De plus, elle est croissante car pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$. Par conséquent, $(S_n)_{n \geq 1}$ converge.

— Pour $a = 1$, on a donc

$$S_{n-1} \geq \int_1^n f(t) dt = \ln(n)$$

et par comparaison, la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ diverge donc vers $+\infty$.

□

Proposition 3.4 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Les séries $\sum_{k \geq 0} q^k$, $\sum_{k \geq 1} kq^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} - \sum_{k=0}^{+\infty} q^k &= \frac{1}{1-q}, \\ - \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} &= \frac{1}{(1-q)^2}, \\ - \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} &= \frac{2}{(1-q)^3}. \end{aligned}$$

Preuve : On remarque déjà que si $|q| \geq 1$, les séries sont grossièrement divergentes.

Soit $|q| < 1$ et montrons que les séries convergent.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $] -1, 1[$ par :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

— Comme $|q| < 1$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ et par conséquent l'égalité ci-dessus entraîne que

$\sum_{k \geq 0} q^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

— La fonction f_n est dérivable car polynomiale et en dérivant on a pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Comme $|q| < 1$, on en déduit comme précédemment que $\sum_{k \geq 0} kq^k$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-(n+1)q^n(1-q) + 1 - q^{n+1}}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

— On procède de manière identique en dérivant une deuxième fois f_n pour obtenir une expression de $\sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2}$.

□

Exemple 3.4. Étudier la nature et, le cas échéant, trouver la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^{2n+1}}$.

On remarque que pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{n^2}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \frac{n(n-1) + n}{9^n} = \frac{1}{81} \frac{n(n-1)}{9^{n-2}} + \frac{1}{27} \frac{n}{9^{n-1}}.$$

Ainsi la série est une combinaison linéaire de la série géométrique dérivée d'ordre 1 et d'ordre 2 de raison $\left|\frac{1}{9}\right| < 1$.

Elle est donc convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^{2n+1}} &= \frac{1}{3 \cdot 9^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{9^{n-2}} + \frac{1}{3 \cdot 9} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{9^{n-1}} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 9^2} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)^3} + \frac{1}{3 \cdot 9} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2} \\ &= \frac{15}{256}.\end{aligned}$$

Proposition 3.5 (Séries exponentielles)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente de somme e^x .

Preuve : (Admis) **Exercice pour les plus avancés :** soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n la fonction définie pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^n \frac{s^k}{k!} + e^s \int_0^s \frac{e^{-t}}{n!} t^n dt.$$

1. Montrer que f_n est dérivable et calculer sa dérivée.
2. En déduire que f_n est solution d'une équation différentielle homogène puis déterminer f_n .
3. Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{|x|} \frac{(|x|)^{n+1}}{n!}.$
4. En déduire que $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et que sa limite est e^x .

□

Exemple 3.5. Étudier la nature et, le cas échéant, trouver la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+7}{2^n n!}$.

On remarque que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{n+7}{2^n n!} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!} + 7 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}.$$

Ainsi pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k+7}{2^k k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} + 7 \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} + 7 \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}.$$

La série est donc combinaison de séries convergentes donc elle converge et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+7}{2^n n!} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} \\ &= \frac{15}{2} e^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

3.2 Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

Une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est à **termes positifs** si pour tout $k \geq n_0$ $u_k \geq 0$.

Proposition 3.6

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série à **termes positifs**. Alors la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ des sommes partielles est croissante. En particulier

- si $(S_n)_{n \geq n_0}$ est majorée, la série est convergente ;
- si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée, la série diverge vers $+\infty$.

Preuve : Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série à termes positifs et $(S_n)_{n \geq n_0}$ la suite de ses sommes partielles. Alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0.$$

Donc la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ est croissante. La deuxième partie de l'énoncé est alors une conséquence directe du théorème de convergence monotone. $\square$

Proposition 3.7 (Comparaison des séries à termes positifs et relation d'ordre)

Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries à **termes positifs**. On suppose que

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n.$$

1. Si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente.
2. Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est divergente alors $\sum_{n \geq n_0} v_n$ est divergente.

Preuve : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs**. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n.$$

Alors :

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=n_0}^n v_k.$$

1. On suppose que $\sum v_n$ est convergente. Par hypothèse, la suite $\left(\sum_{k=n_0}^n v_k \right)_{n \geq n_0}$ est convergente donc majorée.

Ainsi la suite $\left(\sum_{k=n_0}^n u_k \right)_{n \geq n_0}$ est majorée et la proposition précédente permet de conclure qu'elle converge.

2. On suppose que $\sum u_n$ est divergente. Par hypothèse, la suite $\left(\sum_{k=n_0}^n u_k\right)_{n \geq n_0}$ est divergente et croissante donc diverge vers $+\infty$.

Ainsi la suite $\left(\sum_{k=n_0}^n v_k\right)_{n \geq n_0}$ diverge aussi vers $+\infty$.

□

Exemple 3.6.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi par comparaison le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.

Ainsi par comparaison le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

3. Pour tout $n \geq 3$, on a $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Ainsi par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{k+2} e^{-n} = 0$. Il existe donc n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$0 \leq n^k e^{-n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi le critère de comparaison pour les séries à termes positifs $\sum_{n \geq 0} n^k e^{-n}$ converge.

Proposition 3.8 (Théorème d'équivalence)

Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries à **termes positifs**.

Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{n \geq n_0} v_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature.

Preuve : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

On suppose que $u_n \sim v_n$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Il existe donc $N \geq n_0$ tel que :

$$\forall n \geq N \quad \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n.$$

D'après la proposition 3.7, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge aussi (en utilisant l'inégalité gauche) et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi (en utilisant l'inégalité droite). □

Exemple 3.7. Déterminons la nature de la série $\sum \frac{2n^2 + 2n - 12}{5n^3 + 6}$.

1. Déterminons la nature de la série $\sum \frac{2n^2 + 2n - 12}{5n^3 + 6}$.

Par les propriétés sur les équivalents : $\frac{2n^2 + 2n - 12}{5n^3 + 6} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n^2}{5n^3} = \frac{2}{5n}$.

Or les séries sont à termes positifs à partir d'un certain rang et la série $\sum \frac{2}{5n}$ diverge.

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{2n^2 + 2n - 12}{5n^3 + 6}$ est divergente.

2. Déterminons la nature de la série $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ alors par équivalent usuel :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Or les séries sont à termes positifs et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ est convergente.

3.3 Convergence absolue

Définition 3.3 (Convergence absolue)

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série numérique. On dit que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est **absolument convergente** (ou converge absolument) si la série $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge.

Proposition 3.9

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série numérique. Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a :

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

Remarque 3.4. La réciproque de la proposition précédente est fausse ! Il est donc faux de conclure qu'une série est divergente parce qu'elle n'est pas absolument convergente.

Par exemple la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas absolument convergente et est convergente (voir la méthode de l'exercice 7 du TD).

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$, on pose $u_n^+ = \max(0, u_n)$ et $u_n^- = -\min(0, u_n)$.

Les suites (u_n^+) et (u_n^-) sont positives et pour tout $n \geq 0$:

1. $u_n^+ + u_n^- = |u_n|$ et en particulier $u_n^\pm \leq |u_n|$;
2. $u_n^+ - u_n^- = u_n$.

Sous l'hypothèse que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est absolument convergente, le point 1 permet de conclure, par

comparaison pour les séries à termes positifs, que les séries $\sum_{n \geq n_0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n^-$ sont convergentes.

Le point 2 permet alors de conclure que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes.

De plus, on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| &= \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n^- \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n^+ \right| + \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n^- \right| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n^+ + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n^- \quad (\text{sommes positives}) \\ &\leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n^+ + u_n^-) \quad (\text{linéarité}) \\ &\leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|. \end{aligned}$$

□

Exemple 3.8. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n(n^5 + 2n^3 + 1)}{e^n + 2}$.

On a : $\left| \frac{(-1)^n(n^5 + 2n^3 + 1)}{e^n + 2} \right| = \frac{(n^5 + 2n^3 + 1)}{e^n + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^5 e^{-n}$.

Par le critère d'équivalent, comme $\sum_{n \geq 0} n^5 e^{-n}$ converge (voir l'exemple 4) alors la série $\sum \frac{(-1)^n(n^5 + 2n^3 + 1)}{e^n + 2}$ est absolument convergente donc convergente.

Remarque 3.5. La notion de convergence absolue sera particulièrement utile en probabilité, notamment pour définir la notion d'espérance d'une variable aléatoire discrète prenant une infinité de valeur.

Si l'on fait l'analogie entre espérance et la moyenne, on souhaite que la valeur de l'espérance d'une variable aléatoire ne dépende pas de l'ordre dans lequel on a sommé les différents termes qui la définissent.

Malheureusement, lorsqu'on manipule des sommes infinies, il peut arriver que changer l'ordre de sommation modifie la valeur de la somme !

Cependant, on peut montrer que lorsqu'il y a convergence absolue, changer l'ordre de sommation ne modifie pas la valeur de la somme.