

Mathématiques – TD3

SÉRIES

Exercice 1 (★). Étudier la nature des séries suivantes et, le cas échéant, calculer leur somme.

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{7^{n-1}}.$

3. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n n}{3^n}.$

5. $\sum_{n \geq 0} \frac{n 2^n}{n!}.$

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{4n^2 + 5n}{5^n}.$

4. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}.$

6. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^{2n+1}}.$

Exercice 2 (★★). On considère la série de terme général donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n^3 + 2n^2 - 4n + 1}{n!}.$$

1. Montrer que la famille $(1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Déterminer les coordonnées de $x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ dans cette base.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3 (Télescopage ★). Étudier la nature des séries et, le cas échéant, déterminer leur somme.

1. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right);$

3. $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right);$

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)};$

4. $\sum_{n \geq 2} \frac{2}{n(n^2-1)}$ (Calculer $\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1}$).

Exercice 4 (★★). On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1]$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$ et déterminer sa somme si elle existe.
4. Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ diverge.
5. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 5 (★). Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3 - n^2 + 1}{5n^5 + 3n^4 + 2n}.$
2. $\sum_{n \geq 1} (n^{\frac{1}{n}} - 1).$
3. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$
4. $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$
5. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\ln n}}.$
6. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^3} \right).$
7. $\sum_{n \geq 2} \frac{n}{\ln n}.$
8. $\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt{n^2 - n + 2} - n \right).$
9. $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \right).$

Exercice 6 (★). Étudier la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right).$
2. $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right).$
3. $\sum_{n \geq 0} ((-1)^n n + \sqrt{n}) e^{-\sqrt{n}}.$

Exercice 7 (Une série convergente mais pas absolument convergente ★★). Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont adjacentes.
 (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge.
 (c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 (Suites équivalentes, séries de natures différentes ★★). Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1 \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $v_n \sim u_n$.
2. Montrer que la série $\sum v_n$ diverge (on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent).

Exercice 9 (★★★). On note $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum_{k=2}^n f(k)$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1).$$

3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}.$$

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}.$$

(c) Établir : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n)).$$

(a) En utilisant le résultat de la question 2., montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

(b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \ln(n)}.$$

(c) En déduire une fonction Python prenant en entrée un réel `eps` > 0 et renvoyant une valeur approchée de ℓ à `eps` près.