Chapitre 5

Variables aléatoires réelles discrètes

5.3 Lois usuelles

5.3.1 Lois certaines

Loi certaine

- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi certaine si elle ne prend qu'une seule valeur $a \in \mathbb{R}$:

$$X(\Omega) = \{a\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = a) = 1.$$

- Si X suit une loi certaine avec $X(\Omega) = \{a\}$ alors

$$\mathbb{E}(X) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0.$$

- Une variable aléatoire X suit une loi certaine si et seulement si $\mathbb{V}(X) = 0$.

5.3.2 Lois de Bernoulli

Lois de Bernoulli

Soit $p \in]0, 1[$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si :
  i) $X(\Omega) = \{0, 1\}$,
  ii) $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

Exemple 5.1 (**Expérience de référence**). On considère une expérience aléatoire possédant deux issues. L'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité $p \in]0, 1[$;

l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1-p$ (une telle expérience est appelée une épreuve de Bernoulli).
La variable aléatoire X égale à 1 en cas de succès et à 0 en cas d'échec suit une loi $\mathcal{B}(p)$.

Exemple 5.2. On lance une pièce ayant probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur Pile et $1-p$ de tomber sur Face. On note X la variable aléatoire égale à 1 si on obtient Pile et à 0 si on obtient Face . Alors :

— $X(\Omega) = \{0,1\}$,
— $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$.

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemple 5.3 (Fonction indicatrice). Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement. On note 1_A la variable aléatoire définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

Exemple 5.4 (Simulation). On rappelle que la commande `rd.rand()` du module `numpy.random` tire un réel de $[0,1[$ au hasard selon la loi suivante

$$\text{pour tout intervalle } I \subset [0,1], \quad \mathbb{P}(\texttt{rd.rand()} \in I) = \text{longueur}(I).$$

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simule_Bernoulli(p):
4         if rd.rand()<p:
5                 return 1
6         else:
7                 return 0
```

5.3.3 Lois binomiales

Lois binomiales

Soient $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de binomiale de paramètres n et p, et on note
  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si :
  i) $X(\Omega) = \{0,1,\dots,n\}$,
  ii) $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Exemple 5.5 (Expérience de référence). On considère une expérience aléatoire qui consiste à répéter n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 5.6. On considère une pièce ayant probabilité p de tomber sur Pile et $1-p$ de tomber sur Face. On lance n fois consécutives et indépendantes cette pièce et on note X la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus . Alors

— $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^n$,
— $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
— pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:
  i) le nombre d'issues réalisant $[X = k]$ consiste en un choix de k lancers (ceux qui donneront pile) : il y a $\binom{n}{k}$ choix ;
  ii) par indépendance des lancers, la probabilité pour qu'une des issues ci-dessus arrive est $p^k(1-p)^{n-k}$;
  iii) donc finalement $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1_p)^{n-k}$.

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 5.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier tir est p et celle de toucher la cible au second tir est aussi égale à p. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note A la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et B la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs.

1. Donner la loi de A.
2. Donner la loi de B.

Exemple 5.7 (**Simulation**). En supposant définie la fonction `simule_Bernoulli` donnée précédemment :

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simule_Binomiale(n,p):
4         s = 0
5         for k in range(n):
6                 s+=simule_Bernoulli(p)
7         return s
```

5.3.4 Lois uniformes

Lois uniformes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ si :
  i) $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$,
  ii) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exemple 5.8 (**Expérience de référence**). On considère une expérience aléatoire qui possède n issues différentes numérotées de 1 à n qui sont équiprobables.
La variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue suit une loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Exemple 5.9 (**Simulation**). On rappelle que la commande `rd.rand()` du module `numpy.random` tire un réel de $[0, 1[$ au hasard selon la loi suivante

$$\text{pour tout intervalle } I \subset [0,1], \quad \mathbb{P}(\texttt{rd.rand()} \in I) = \text{longueur}(I).$$

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simule_uniforme(n):
4         u = rd.rand()
5         for k in range(n):
6                 if k/n<= u <(k+1)/n:
7                         return k+1
```

Remarque 5.1. Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $a < b$.

— On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ si :

i) $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$,

ii) $\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{b - a + 1}$.

— Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$