Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2026-2027

BCPST2 – Mathématiques

DM 1 – À RENDRE LE 05/10

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice 1 – Une fonction de deux variables

1. Le but de cette question est de démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall (a,b,c) \in]0,+\infty[^3, \quad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Soit $(a,b,c) \in]0,+\infty[^3$. On note $A = \dfrac{a+b+c}{3}$ et $G = \sqrt[3]{abc}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x \leq e^x$.

(b) En déduire que :

$$\frac{a}{A} \leq e^{\frac{a}{A}-1}.$$

On admet que de même :

$$\frac{b}{A} \leq e^{\frac{b}{A}-1} \quad \text{et} \quad \frac{c}{A} \leq e^{\frac{c}{A}-1}.$$

(c) En déduire que

$$\frac{G^3}{A^3} \leq e^{\frac{a+b+c}{A}-3}$$

puis conclure.

2. On note f la fonction définie sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}.$$

(a) Justifier soigneusement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$ et déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1.

(b) Démontrer que f admet un unique point critique.

(c) Démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

Exercice 2 – Des séries

Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$;

2. $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \left(e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}} - 1\right)$;

3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-2}{3^n(n+1)!}$ (et calculer la somme) ;

4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Exercice 3 – Le problème de Bâle

Le problème de Bâle consiste à déterminer la valeur de la somme de la série convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Il a été résolu par Leonhard Euler en 1735 qui a prouvé que la somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.
Le but de cette exercice est d'en donner une preuve.

1. **Une remarque avant de commencer**. Pour tout entier $n \geq 3$, on considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left]\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

   (a) Écrire une fonction Python `fn(n,x)` qui prend en entrées un entier $n \geq 3$ et un réel $x \in [0,1]$ et qui renvoie $f_n(x)$.
   (b) Écrire une commande qui affiche le graphe de f_3, f_4 et f_5 sur $[0,1]$.
   On découpera $[0,1]$ en mille intervalles.
   (c) Recopier les tracés de f_2 et f_3 sur des figures différentes.
   (d) Montrer que f_n est continue sur $[0,1]$
   (e) Pour tout $n \geq 3$, calculer $\int_0^1 f_n(x)dx$.
   (f) Soit $x \in [0,1]$ fixé. Calculer $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
   (g) Les nombres $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ sont-ils égaux ?

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) dx = 0.$$

   Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.

3. Pour tout $x \in [0,\pi]$, on pose $S_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

   Montrer que : $\forall x \in]0,\pi]$, $S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

   Indication : on pourra utiliser les nombres complexes.

4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Calculer $\int_0^\pi (ax^2 + bx)\cos(nx)dx$.
   Indication : on pourra effectuer des intégrations par parties.

(b) En déduire une valeur de a et une valeur de b telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi (ax^2 + bx)\cos(nx)dx = \frac{1}{n^2}.$$

(c) Pour ces valeurs de a et de b, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^\pi (ax^2 + bx)S_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On considère pour la suite, a et b déterminés ci-dessus.

(a) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement, que l'on notera $\tilde{f}$ est dérivable en 0.
Indication : on pourra effectuer un DL.

(b) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

(c) Conclure sur la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.