Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

Dm 1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice – Une fonction de deux variables

1. (a) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - x - 1.$$

En tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x - 1.$$

On en déduit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		↘	0	↗	

En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq g(0) = 0$$

i.e

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$$

(b) En appliquant l'inégalité précédente à $x = \dfrac{a}{A} - 1$ on obtient :

$$\frac{a}{A} \leq e^{\frac{a}{A}-1}.$$

On admet que de même :

$$\frac{b}{A} \leq e^{\frac{b}{A}-1} \quad \text{et} \quad \frac{c}{A} \leq e^{\frac{c}{A}-1}.$$

(c) En multipliant membre à membre les inégalités ci-dessus, on obtient, puisque tous les termes sont positifs :

$$\frac{abc}{A^3} \leq e^{\frac{a}{A}-1} e^{\frac{b}{A}-1} e^{\frac{c}{A}-1} = e^{\frac{a+b+c}{A}-3}$$

i.e

$$\frac{G^3}{A^3} \leq e^{\frac{a+b+c}{A}-3}.$$

Or par définition de A, on sait que :

$$\frac{a+b+c}{A} = 3.$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{G^3}{A^3} \leq e^{3-3} = 1.$$

Finalement, comme A^3 est positif et que la fonction racine cubique est croissante, on trouve :

$$G \leq A$$

ce qui est bien l'inégalité souhaitée.

2. **(a)** Les fonctions coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$. Ainsi :

- par produit $(x,y) \mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$ et ne s'y annule pas
- donc par quotient, $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{xy}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$.

Finalement par somme, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$. De plus pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{1}{x^2 y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{1}{y^2 x}.$$

(b) Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. Alors :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{1}{x^2} \\ y^2 x & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x & = & 1 \end{array} \right.$$

Ainsi $(1,1)$ est l'unique point critique de f.

(c) Comme $]0,+\infty[^2$ est un ouvert, si f admet un extremum, c'est nécessairement en $(1,1)$.
Or $f(1,1) = 3$ et d'après la question 1 :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad \frac{f(x,y)}{3} = \frac{x+y+\frac{1}{xy}}{3} \geq \sqrt[3]{x \times y \times \frac{1}{xy}} = 1.$$

Ainsi :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad f(x,y) \geq 3 = f(1,1).$$

La fonction f admet donc un minimum global en $(1,1)$ qui vaut 3.

Exercice 2 – Des séries

Étudier la nature des séries suivantes :

1. Étude de $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-\sqrt{n}}$.

Pour tout $n\geq 2$, on a : $0<n-\sqrt{n}\leq n$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall n\geq 2,\quad 0\leq\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n-\sqrt{n}}.$$

Or la série harmonique diverge donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-\sqrt{n}}$ diverge aussi.

2. Étude de $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left(e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}}-1\right)$.

Par équivalents usuels : $\displaystyle\frac{n^2+1}{n^4+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^2}{n^4}=\frac{1}{n^2}$.

En particulier, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}=0$ et encore par équivalent usuel :

$$e^{\frac{n^2+1}{n^4+1}}-1\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^2+1}{n^4+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left(e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}}-1\right)$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ sont à termes positifs et que $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ converge alors d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left(e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}}-1\right)$ converge aussi.

3. Étude de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n-2}{3^n(n+1)!}$.

Soit $N\in\mathbb{N}$. Pour tout $n\in N$ on a

$$\begin{aligned}\frac{n-2}{3^n(n+1)!}=\frac{n+1-3}{3^n(n+1)!}&=\frac{n+1}{3^n(n+1)!}-3\frac{1}{3^n(n+1)!}\\&=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!}-3\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{(n+1)!}\\&=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!}-9\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Ainsi en sommant on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{n-2}{3^n(n+1)!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!}-9\sum_{n=0}^{N}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!}-9\sum_{n=1}^{N+1}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!}.$$

On reconnait des sommes partielles de séries exponentielles (donc convergentes). Ainsi, par combinaison linéaire, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n-2}{3^n(n+1)!}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-2}{3^n(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} - 9\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n!} = e^{\frac{1}{3}} - 9(e^{\frac{1}{3}} - 1) = 9 - 8e^{\frac{1}{3}}$$

4. Étude de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ on obtient avec le DL d'ordre 3 de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

De même avec le DL à l'ordre 4 en 0 de cos, on a :

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{24n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{7}{24n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7}{24n^2} \end{aligned}$$

En particulier, à partir d'un certain rang, $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\frac{7}{24n^2}$ sont de même signe *i.e.* positifs (on peut aussi utiliser la convergence absolue) donc par le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs,
les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{7}{24n^2}$ sont de même nature.

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{7}{24n^2}$ converge (multiple d'une série usuelle convergente) alors
$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ converge aussi.

Exercice 3 – Le problème de Bâle

Le problème de Bâle consiste à déterminer la valeur de la somme de la série convergente $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Il a été résolu par Leonhard Euler en 1735 qui a prouvé que la somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.
Le but de cette exercice est d'en donner une preuve.

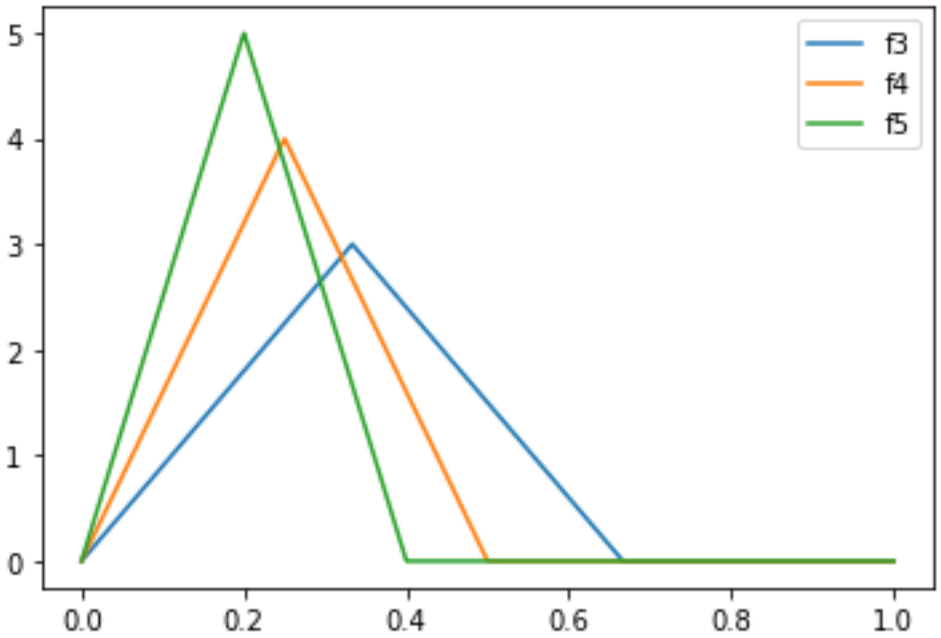
1. **Une remarque avant de commencer**. Pour tout entier $n \geq 3$, on considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left]\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

(a)
```
def fn(n,x):
    if 0<=x<=1/n:
        return n**2*x
    elif 1/n<x<=2/n:
        return 2*n-n**2*x
    else:
        return 0
```

(b)
```
abscisses = np.linspace(0,1,1000)
for k in [3,4,5]:
    ordonnees = [fn(k,x) for x in abscisses]
    plt.plot(abscisses,ordonnees)
plt.show()
```

(c) On obtient les courbes suivantes :



(d) Soit $n \geq 3$. Il est clair que f_n est continue sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, sur $\left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ et sur $\left]\frac{2}{n}, 1\right]$ car elle est affine sur chacun de ces intervalles.

Il reste à étudier la continuité en $\frac{1}{n}$ et en $\frac{2}{n}$.

On a :

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n(x) = \lim_{x\to\frac{1}{n}^-} n^2x = n;$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}^+} f_n(x) = \lim_{x\to\frac{1}{n}^+} 2n - n^2x = 2n - n = n;$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n} = n.$$

Ainsi : $\lim_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n(x) = \lim_{x\to\frac{1}{n}^+} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc f_n est continue en $\frac{1}{n}$. De même :

$$\lim_{x\to\frac{2}{n}^-} f_n(x) = \lim_{x\to\frac{2}{n}^-} 2n - n^2x = 0;$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{n}^+} f_n(x) = \lim_{x\to\frac{1}{n}^+} 0 = 0;$$

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) = 2n - n^2\frac{2}{n} = 0.$$

Ainsi : $\lim_{x\to\frac{2}{n}^-} f_n(x) = \lim_{x\to\frac{2}{n}^+} f_n(x) = f_n\left(\frac{2}{n}\right)$.

Donc f_n est continue en $\frac{2}{n}$.

Finalement f_n est continue sur $[0,1]$.

(e) Soit $n \geq 3$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f_n(x)dx + \int_{\frac{2}{n}}^1 f_n(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2x dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (2n - n^2x)dx + \int_{\frac{2}{n}}^1 0dx \\
&= \left[\frac{n^2x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[2nx - \frac{n^2x^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \\
&= \frac{1}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(f) Soit $x \in [0,1]$ fixé.

— Si $x \in]0,1]$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0 < x$ alors il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad x > \frac{2}{n}$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq n_0, \quad x \in \left]\frac{2}{n}, 1\right].$$

Donc : $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

— Si $x = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ainsi, dans tous les cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(g) D'après la question précédente : $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.$

D'autre part, d'après **1.(e)** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1.$

Donc non, ils ne sont pas égaux.

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions f et $x \mapsto -\dfrac{2}{2n+1}\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx &= \left[-\frac{2f(x)}{2n+1}\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right]_0^\pi + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx\\ &= \frac{2f(0)-2f(\pi)\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx\\ &= \frac{2f(0)}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx.\end{aligned}$$

Or d'une part

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2f(0)}{2n+1} = 0$$

et d'autre part, comme f' est continue sur $[0,\pi]$ est elle bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0,\pi]$, $|f'(x)| \leq M$. Donc :

$$0 \leq \left|\frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx\right| \leq \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi \left|f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right|dx \leq \frac{2M\pi}{2n+1}.$$

Donc par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx = 0.$$

Donc finalement, par somme :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx = 0.$$

3. Pour tout $x \in [0,\pi]$, on pose $S_n(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

Soit $x \in]0, \pi]$.

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right).$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} &= e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} \quad \text{car } e^{ix} \neq 0 \\
&= e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}(e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}}(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}})} \\
&= e^{ix\frac{n+1}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= e^{ix\frac{n+1}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{ix\frac{n+1}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(x\frac{n+1}{2}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(x\frac{n+1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Enfin, des formules de trigonométrie

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad ; \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

on tire :

$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

d'où avec $a = \dfrac{nx}{2}$, $b = \dfrac{(n+1)x}{2}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(x\frac{n+1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) + \sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

car la fonction sinus est impaire.

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Les fonctions $x \mapsto ax^2+bx$ et $x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donc par IPP

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (ax^2+bx)\cos(nx)dx &= \left[(ax^2+bx)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2ax+b)\frac{\sin(nx)}{n}dx\\ &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi (2ax+b)\sin(nx)dx.\end{aligned}$$

De même, les fonctions $x \mapsto 2ax+b$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ donc par IPP :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (ax^2+bx)\cos(nx)dx &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi (2ax+b)\sin(nx)dx\\ &= \frac{1}{n}\left(\left[(2ax+b)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2a}{n}\cos(nx)dx\right)\\ &= \frac{(2a\pi+b)(-1)^n-b}{n^2} - \frac{2a}{n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi\\ &= \frac{(2a\pi+b)(-1)^n-b}{n^2}.\end{aligned}$$

(b) En prenant $b=-1$ et $a=\dfrac{1}{2\pi}$ alors $2\pi a+b=0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi (ax^2+bx)\cos(nx)dx = \frac{1}{n^2}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (ax^2+bx)S_n(x)dx &= \int_0^\pi \frac{ax^2+bx}{2}dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi (ax^2+bx)\cos(kx)dx\\ &= \int_0^\pi \frac{ax^2+bx}{2}dx + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\int_0^\pi \frac{ax^2+bx}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\right]_0^\pi = a\frac{\pi^3}{6}+b\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi

$$\int_0^\pi (ax^2+bx)S_n(x)dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On considère pour la suite, a et b déterminés ci-dessus.

(a) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{ax^2+bx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement, que l'on notera $\tilde{f}$ est dérivable en 0.
Indication : on pourra effectuer un DL.
On sait que $2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = x - \dfrac{x^3}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ donc :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{ax^2+bx}{x - \frac{x^3}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} &= \frac{ax+b}{1 - \frac{x^2}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\ &= (ax+b)\left(1 + \frac{x^2}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= b + ax + \underset{x\to 0}{o}(x). \end{aligned}$$

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = b$ et comme $\tilde{f}$ possède un DL d'ordre 1 en 0, $\tilde{f}$ dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = a$.

(b) Il est clair que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ par quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x \in]0,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(x) = f'(x) &= \frac{2(2ax+b)\sin(x/2) - \cos(x/2)(ax^2+bx)}{4\sin^2(x/2)} \\ &= \frac{2(2ax+b)\left(\frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)(ax^2+bx)}{4\sin^2(x/2)} \\ &= \frac{(2a-a)x^2 + (b-b)x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{4\sin^2(x/2)} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{ax^2}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} a \end{aligned}$$

En particulier, $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = a = \tilde{f}'(0)$.
Cela montre que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et finalement sur $[0,\pi]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'une part :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi (ax^2+bx)S_n(x)dx + \frac{\pi^2}{6}.$$

D'autre part, avec la question **3.** :

$$\int_0^\pi (ax^2+bx)S_n(x)dx = \int_0^\pi \tilde{f}(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx$$

et comme $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ d'après la question **2.** on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi (ax^2+bx)S_n(x)dx = 0.$$

Ainsi on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.