Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2026-2027

BCPST2 – Mathématiques

DM 1 – À RENDRE LE 05/10

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

1 Séries de Fourier

On note $\mathcal{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

Soit $f \in \mathcal{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R})$. On appelle coefficients de Fourier trigonométriques de f les nombres :

- $a_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$,
- pour tout $n \geq 1$, $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$,
- pour tout $n \geq 1$, $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

La somme partielle de rang n de la série de Fourier de f, notée $S_n(f)$ est la fonction :

$$S_n(f) : t \longmapsto \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)).$$

On cherche à étudier la série numérique $(S_n(f)(t))_{n\geq 1}$.

1.1 Préliminaires

Dans toute la suite, f est une fonction de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$.

2. Montrer que si f est paire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $b_n(f) = 0$.

3. Montrer que si f est impaire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n(f) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

4. On suppose dans cette question que f est de plus $\mathcal{C}^1$. Exprimer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.

1.2 Convergence de la série de Fourier

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $c_n : t \mapsto \cos(nt)$ et $s_n : t \mapsto \sin(nt)$ et pour $n \geq 1$

$$\mathcal{P}_n = \text{Vect}(c_0, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n).$$

On définit également :

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (f,g) &\longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}N : \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ f &\longmapsto \langle f,f\rangle\end{aligned}$$

5. Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire et symétrique.

6. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\langle f,f\rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si f est la fonction nulle.

7. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ calculer $\langle c_i, c_j\rangle$, $\langle c_i, s_j\rangle$ et $\langle s_i, s_j\rangle$.
Indication : on pourra exprimer $\sin(a)\sin(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ *et* $\cos(a)\cos(b)$ *en fonction de* $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a-b)$, $\cos(a+b)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$.

8. Justifier que $S_n(f) = \langle f, c_0\rangle c_0 + 2\sum_{k=1}^{n}(\langle f, c_k\rangle c_k + \langle f, s_k\rangle s_k)$.

9. En déduire que pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$: $\langle f - S_n(f), Q\rangle = 0$.

10. En déduire que pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$: $N(f - S_n(f) + Q) = N(f - S_n(f)) + N(Q)$.

11. En déduire que $N(S_n(f)) \leq N(f)$.

12. Montrer que $N(S_n(f)) = \dfrac{a_0(f)^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k(f)^2 + b_k(f)^2)$.

13. Déduire des questions précédentes que les séries $\sum_{n\geq 1} a_n(f)^2$ et $\sum_{n\geq 1} b_n(f)^2$ sont convergentes puis que $\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = \lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0$.

On suppose dans le reste de cette partie que $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$.

14. Montrer, en utilisant la question 4, que les séries $\sum_{n\geq 1} a_n(f)$ et $\sum_{n\geq 1} b_n(f)$ sont absolument convergentes.
Indication : on pourra justifier que pour tout réels positifs a *et* b : $ab \leq \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.

15. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(S_n(f)(t))_{n\geq 1}$ converge.

1.3 Théorème de Dirichlet

Dans la partie précédente, on a vu que la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ converge. Le but de cette partie est d'identifier la somme.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note D_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx).$$

16. Justifier que D_n est 2π-périodique et paire.

17. Montrer que $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)dt = 1$.

18. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(x-u)D_n(u)du.$$

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du$$

puis

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u)+f(x-u))D_n(u)du.$$

19. Montrer que pour tout $u \in]0,\pi]$, $D_n(u) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$.

20. Soit $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi : u \mapsto \dfrac{2f(x)-f(x+u)-f(x-u)}{\sin(u/2)}$.

(a) Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0 et étudier sa parité. On notera encore φ ce prolongement.

(b) Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)du$.

(c) En utilisant la dernière partie de la question 13, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)du = 0.$$

(d) En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(S_n(f)(t))_{n\geq 1}$ converge vers $f(t)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)).$$

2 Application à la résolution de l'équation de la chaleur

2.1 Mise en équation

On considère un cylindre homogène de section S, de longueur π, de conductivité thermique K, de capacité thermique massique c_v et de masse volumique ρ.
On suppose que la température T dans la barre ne dépend que de x et t, et que la barre ne subit pas d'influence extérieure.

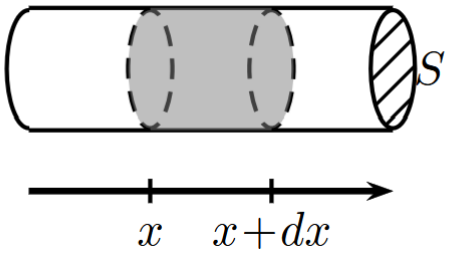


FIGURE 1 – Barre

21. Rappeler la loi de Fourier.

22. À partir d'un bilan énergétique effectué entre les instants t et $t+dt$ sur une portion du cylindre comprise entre les abscisses x et $x+dx$ (cf. Fig. 1), établir que la température $T(t,x)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t,x) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t,x)$$

où α est une constante à exprimer en fonction de K, ρ et c_v.

2.2 Résolution par les séries de Fourier

On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,\pi], \ \dfrac{\partial T}{\partial t}(t,x) = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t,x) & (E) \\ \forall t \geq 0, \ T(t,0) = T(t,\pi) = 0 & (B) \\ \forall x \in [0,\pi], \ T(0,x) = \varphi(x) & (I) \end{cases}$$

où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ vérifiant $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ et qui représente la température initiale dans la barre.

23. On s'intéresse dans cette question à l'équation sans considérer la condition initiale (I) et on cherche les solutions T non nulles pouvant s'écrire :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,\pi], \quad T(t,x) = f(t)g(x)$$

avec f de classe C^1, g de classe C^2 et ne s'annulant pas sauf éventuellement en 0 et π.

(a) Montrer que le rapport $\dfrac{g''}{g}$ est constant (on notera $-s$ cette constante) et que pour tout $t \geq 0$, $f(t) = f(0)e^{-\alpha s t}$.

(b) Montrer que si $s \leq 0$ alors g est la fonction nulle.

(c) En déduire que $s > 0$, qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $s = n^2$ et $A_n \in \mathbb{R}$:

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,\pi], \quad T(t,x) = A_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx).$$

On revient au cas général et on cherche donc une solution du système avec condition initiale sous la forme :

$$T : (t,x) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) e^{-\alpha n^2 t}$$

où $\sum_{n\geq 1} b_n$ est une série absolument convergente.

24. Soit $\tilde{\varphi}$ l'unique fonction impaire et 2π-périodique telle que $\forall x \in [0,\pi]$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$.

(a) Montrer que $\tilde{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) En déduire que $T : (t,x) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\tilde{\varphi}) \sin(nx) e^{-\alpha n^2 t}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0,\pi]$ et vérifie (B) et (I).

25. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,\pi]$, $h \neq 0$ et $\varepsilon > 0$.

Pour tout $n \geq 1$, on note $f_n : (t,x) \mapsto b_n(\tilde{\varphi}) \sin(nx) e^{-\alpha n^2 t}$ de sorte que :

$$T : (x,t) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t,x).$$

(a) Montrer qu'il existe une suite $(\theta_n(h))_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\theta_n(h)| \leq |h|$ et

$$\frac{T(t+h,x) - T(t,x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n(\tilde{\varphi}) \sin(nx) e^{-\alpha n^2 t} (1 - e^{-\alpha n^2 \theta_n(h)}).$$

(b) Montrer qu'il existe N_ε tel que :

$$\left| \alpha \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{+\infty} n^2 b_n(\tilde{\varphi}) \sin(nx) e^{-\alpha n^2 t} (1 - e^{-\alpha n^2 \theta_n(h)}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) Déterminer $\lim_{h\to 0} \alpha \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} n^2 b_n(\tilde{\varphi}) \sin(nx) e^{-\alpha n^2 t} (1 - e^{-\alpha n^2 \theta_n(h)})$.

(d) En déduire que T est dérivable par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,\pi]$ et exprimer $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

26. On admet que, de même, T est deux fois dérivable par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,\pi]$ et que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,\pi], \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(t,x).$$

Montrer que T est solution de (E).