Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2026-2027

# TP Python – 2

## Simulation de variables aléatoires discrètes

L'objet de ce TP est essentiellement de mettre en place une méthodologie pour effectuer des simulations probabilistes.

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Les fonctions Python de tirage au sort que nous allons rencontrer sont des modèles de variables aléatoires au sens où chaque appel à l'une de ces fonctions équivaut à tirer au sort, **indépendamment** des tirages précédents, un nombre flottant, suivant une loi donnée.

Pour ce TP, nous aurons besoin d'importer le module `numpy.random` sous l'alias `rd` :

```
1 import numpy.random as rd
```

# 1 Simulation des lois discrètes classiques

La fonction de tirage au sort fondamentale pour cette partie est la commande `rd.rand()` qui tire un nombre au hasard selon une loi uniforme à densité sur $[0, 1[$.
C'est la seule commande pour générer du hasard autorisée dans cette partie.

## 1.1 Simulation de lois de Bernoulli, de lois binomiales et de lois géométriques

1. (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0, 1[$.
   (b) Écrire une fonction qui simule une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$.
2. (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in ]0, 1[$.
   (b) Quel lien existe-t-il entre une loi $\mathcal{B}(p)$ et une loi $\mathcal{B}(n, p)$ ?
   (c) Écrire une fonction Python `binomiale(n,p)` prenant en entrées un entier naturel `n` et un réel `p`$\in ]0, 1[$ et simulant une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
3. (a) Écrire une fonction `Rep_binomiale(N,n,p)` prenant en entrées des entiers naturels `N`, `n` et un réel `p`$\in ]0, 1[$ et simulant $N$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
   On demande à ce que la fonction renvoie la liste des `N` valeurs des binomiales, la moyenne des valeurs de cette liste ainsi que sa variance.
   (b) Tester avec $N = 10000$, $p = 0.3$ et $n = 11$ et comparer la moyenne et variance obtenue avec l'espérance et la variance du loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Le script suivant affiche l'histogramme des fréquences des valeurs prises lors de 10 000 simulations d'une $\mathcal{B}(11, 0.3)$ :

```
N = 10000
p = 0.3
n = 11

# Affichage histogramme des fréquences
plt.hist(Rep_binomiale(N,n,p)[0],density = True,rwidth = 0.5)
```

4. (a) Recopier le script ci-dessus.
   (b) Soit $X$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(11, 0.3)$. Tracer, sur la même fenêtre graphique que l'histogramme, la représentation graphique de $(\mathbb{P}(X = k))_{k\in[\![0,11]\!]}$.
   (c) Qu'observe-t-on ? Justifier cette observation.
5. (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1[$.
   (b) Quel lien existe-t-il entre une loi $\mathcal{G}(p)$ et une loi $\mathcal{B}(p)$ ?
   (c) Écrire une fonction Python `geo(p)` prenant en entrée un réel `p`$\in]0, 1[$ et simulant une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

### 1.2 Simulation d'une loi uniforme discrète

Le but de cette partie est de simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
On rappelle que si $x$ est un réel positif, sa partie entière, notée $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier $n$ tel que :

$$n \leq x < n + 1.$$

1. Rappeler la définition d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi de uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $x$ un nombre tiré au hasard dans $[0, 1[$ avec la commande `rd.rand()`.
   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ :

   $$\lfloor nx \rfloor = k \iff \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}.$$

   (b) En déduire, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(\lfloor n * \texttt{rd.rand()} \rfloor = k)$.
   (c) Écrire une fonction `Uniforme(n)` qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et simule une variable de loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$.
   *Indication : la fonction* ***`np.floor`*** *donne la partie entière d'un nombre réel et la fonction* ***`int`*** *transforme un* ***`float`*** *en* ***`int`****.*
3. Utiliser la fonction précédente pour tracer l'histogramme d'une suite de `N = 1000` tirages uniformément en 0 et 9.

### 1.3 Variables aléatoires discrètes finies

1. Écrire une fonction `VaDiscrete(p)` où `p` est une liste de `float` positifs dont la somme vaut 1 et retournant un nombre entier (un `int` donc) entre 0 et `len(p)-1` tiré suivant la loi décrite par `p` c'est-à-dire :

   $$\mathbb{P}(\texttt{VaDiscrete(p)} = k) = \texttt{p[k]}.$$

2. Écrire un bloc de code calculant une liste de `N = 10000` nombres tirés suivant la loi `p=[0.1,0.2,0.4,0.3]` et afficher l'histogramme de cette liste.
3. Donner la moyenne et la variance de cette liste. Faire imprimer ces nombres ainsi que les valeurs théoriques de l'espérance et de la variance de la variable `VaDiscrete(p)`.

## 2 Simulation d'une loi uniforme

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$ et $F_n$ la fonction de répartition de $U_n$.

1. (a) Écrire une fonction `simuleU(n)` qui simule $U_n$.
   (b) Écrire une fonction `Fn_emp(x,N,n)` avec en entrées en réel `x`, deux entiers naturels `N`, `n` qui simule `N` fois $U_n$ et renvoie la fréquence où $U_n$ prend des valeurs inférieure ou égale à $x$.
   (c) Que vaut $\lim_{N\to+\infty}$ `Fn_emp(x,N,n)` ? Justifier.
   (d) On prendra $N = 1000$. Pour $n \in \{5, 10, 100\}$, tracer la courbe représentative de $x \mapsto$ `Fn_emp(x,N,n)` sur $[-0.5; 1.5]$.
   (e) Que peut-on conjecturer sur la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i} \quad ; \quad (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n \right\}$.
   (a) Montrer que $\varphi_n : (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}$ est une bijection de $\{0,1\}^n$ sur $D_n$.
   *Indication : pour $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \neq (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ on pourra considérer $i_0 = \min\{j \mid x_j \neq y_j\}$.*
   (b) Montrer que pour tout $x \in D_n$ il existe un unique $p \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ tel que $x = \frac{p}{2^n}$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in D_n$, $F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$.
   (d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ étudier la monotonie de $(F_n(x))_{n\geq 1}$ et en déduire que cette suite converge vers un réel positif $\ell(x)$.
   (e) Déterminer $\ell(x)$ pour $x \leq 0$ et $x \geq 1$.
   (f) Déterminer $\ell(x)$ pour tout $x \in \bigcup_{n\geq 1} D_n$.
   *Indication : on pourra montrer que pour tout $n$, $D_n \subset D_{n+1}$.*
   (g) Soit $x \in ]0,1[ \setminus \bigcup_{n\geq 1} D_n$. Montrer en utilisant 2.(b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in D_n$ tel que :
   $$x_n < x < x_n + \frac{1}{2^n}.$$
   Justifier ensuite que $F_n(x) = F_n(x_n) = x_n + \frac{1}{2^n}$.
   (h) En déduire $\ell(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et conclure que $(U_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire à déterminer.