Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2026-2027

TP Python – 1

Révisions : suites et fonctions

2 Tableau Numpy

2.1 Création d'un tableau Numpy

1. Étant donné deux réels $a < b$ et un entiers naturel n écrire une ligne de programme créant un vecteur, sous forme d'un tableau `numpy`, de n nombres régulièrement espacés entre a et b.

   En supposant a, b et n préalablement définis :

```
np.linspace(a,b,n)
```

2. Étant donné deux réels $a < b$ et un entiers naturel n écrire une ligne de programme créant une liste de n nombres régulièrement espacés entre a et b (sans utiliser de commande `numpy`).

   En supposant a, b et $n \geq 2$ préalablement définis :

```
[ a +k*(b-a)/(n-1) for k in range(n)]
```

3 Fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)^2$.
On définit une suite (u_n) en posant : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Programmer la fonction f.

```
def f(x):
        return (x-1)**2
```

2. Écrire une fonction `suite(n,u0)` qui prend en argument un entier naturel n et le terme initial u_0 et renvoie la valeur de u_n.

```
def suite(n,u0):
        u = u0
        for k in range(1,n+1):
                u = f(u)
        return u
```

3. Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie la liste $[u_0, \ldots, u_n]$.

```
def suite2(n,u0):
        L=[u0]
        for k in range(1,n+1):
                L.append(f(L[-1]))
        return L
```

4 Algorithmes à accumulateur

1. Écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel `N` et qui renvoie la valeur de $\sum_{n=0}^{N} u_n$ où (u_n) est la suite définie au paragraphe précédent.

```
def somme(N,u0):
        L = suite(N,u0)
        s = 0
        for elt in L:
                s += elt
        return s
```

2. Écrire une fonction `mini(n,g,a,b)` qui prend en argument un entier naturel non nul `n` et une fonction g définie sur $[a,b]$, qui créer le vecteur $\left(g\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et en détermine la coordonnée minimum.

```
def mini(n,g,a,b):
        L = [g(a+k*(b-a)/n) for k in range(n+1)]
        minimum = L[0]
        abs_min = 0
        for i in range(len(L)):
                if L[i]<minimum:
                        minimum = L[i]
                        abs_min = i
        return i, L[i]
```

3. En déduire une valeur approchée du minimum sur $[0,5]$ de $x\mapsto f(x)-x$ (où f est la fonction définie au paragraphe **??**).
   Plus n est grand, plus `mini(n,g,a,b)` donne une bonne approximation du minimum de g sur $[a,b]$ et d'une abscisse en lequel il est atteint.

5 Affichage graphique

L'affichage de graphique nécessite d'importer un module spécifique :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

On considère la fonction et la suite définies dans un paragraphe précédent.

1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    """ fonction f
    """
    return (x-1)**2
```

```
8
9  def fof(x):
10     """ fonction fof
11     """
12     return f(f(x))
13
14 X = np.linspace(0,3,100)   #vecteur de 100 points de 0 à 3
15 Y = f(X)   #vecteur des images des éléments de X
16 plt.plot(X,X)   # graphe de X en fonction de X
17 plt.plot(X,Y)   # graphe de Y en fonction de X
18 plt.show()      # commande d'affichage
```

On obtient le graphique suivant :

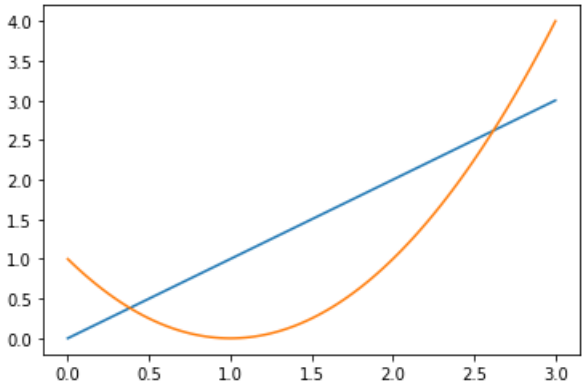


FIGURE 1 – En orange ,le graphe de f ; en bleu, la droite $y = x$

On conjecture que f est décroissante sur $]-\infty, , 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$ et qu'elle possède deux points fixes (les abscisses des points d'intersection des deux courbes).

2. Tracer la représentation graphique des 20 premiers termes de la suite (u_n) avec $u_0 = 3$.

```
1 N = range(10)
2 U = suite(9,3.0)   # liste [u0,...,u9]
3 U = [u for u in U]   # lites [ln(u0),...,ln(u9)]
4 plt.plot(N,U,'o')
5 plt.show()
```

Le graphe obtenu n'est pas très parlant.

3. Tracer la représentation graphique des 20 premiers termes de la suite $(\ln(u_n))$ avec $u_0 = 3$.

```
1 N = range(10)
2 U = suite(9,3.0)   # liste [u0,...,u9]
3 U = [np.log(u) for u in U]   # lites [ln(u0),...,ln(u9)]
4 plt.plot(N,U,'o')
5 plt.show()
```

On obtient le graphique suivant :
On conjecture que $(\ln(u_n))_n$ donc (u_n) divergent.

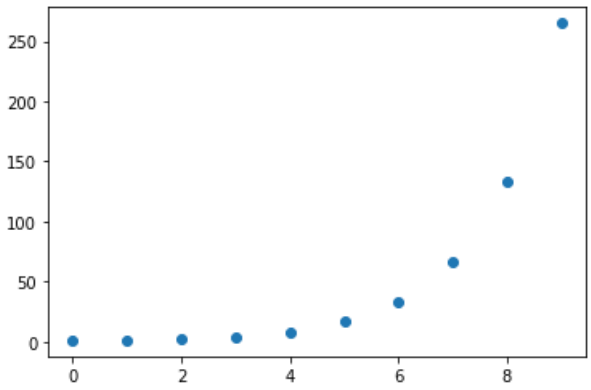


FIGURE 2 – Représentation graphique de $(\ln(u_n))_n$.

6 Pour aller plus loin

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)^2$.
On définit une suite (u_n) en posant : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. La fonction f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 2(x-1).$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

On en déduit, comme f est croissante sur $[1, +\infty[$ que :

$$f([3, +\infty[) = [f(3), +\infty[= [4, +\infty[\subset [3, +\infty[.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n \geq 3$.

— Initialisation : $u_1 = f(u_0) = 4 \geq u_0 = 3$ donc la propriété est vraie au rang 0.
— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_{n+1} \geq u_n \geq 3$. Par croissance de f sur $[3, +\infty[$ on a alors :

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq u_{n+1} = f(u_n) \geq f(3) \geq 3.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n \geq 3$.

La suite est donc croissante. Par le théorème de la limite monotone, soit elle est convergente soit elle diverge vers $+\infty$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) = u_{n+1}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc si la suite convergeait vers une limite ℓ, on aurait par passage à la limite :

$$f(\ell) = \ell \quad \text{donc} \quad \ell \in \{a, b\}.$$

D'autre part, comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$, on aurait aussi $\ell \geq 3$.
Or, pour tout $x \geq 3$ on a :

$$f(x) - x = x^2 - 3x + 1 = x(x-3) + 1 \geq 1$$

donc f n'a pas de point fixe dans $[3, +\infty[$.
Par conséquent, (u_n) diverge vers $+\infty$ ce qui est cohérent avec la simulation numérique.

2. (a) Compte tenu du signe de $x \mapsto f(x) - x$ sur $[0, 1]$ que l'on conjecture sur le graphe, on obtient l'algo de dichotomie suivante

```
1  def dicho(eps):
2  """
3  Entrée : eps >0
4  Sortie : valeur approchée de a à eps près
5  """
6      m = 0
7      M = 1
8      c = (m+M)/2
9      while np.abs(m-M)>eps:
10         if f(c)-c > 0:
11             m = c
12             c = (m+M)/2
13         else :
14             M = c
15             c = (m+M)/2
16     return c
```

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = x \iff (x-1)^2 = x \iff x^2 - 3x + 1 = 0 \iff x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Les points fixes de f sont donc $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Comme a est le plus petit, on trouve $a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

```
1  In [1]: (3-np.sqrt(5))/2
2  Out[1]: 0.3819660112501051
3
4  In [1]: dicho(10**(-3))
5  Out[7]: 0.38232421875
```

3. Dans cette question on suppose que $u_0 \in [0,1]$ (pour les simulations numériques, on prendra $u_0 = 0.5$).

   (a) On obtient le graphique suivante :

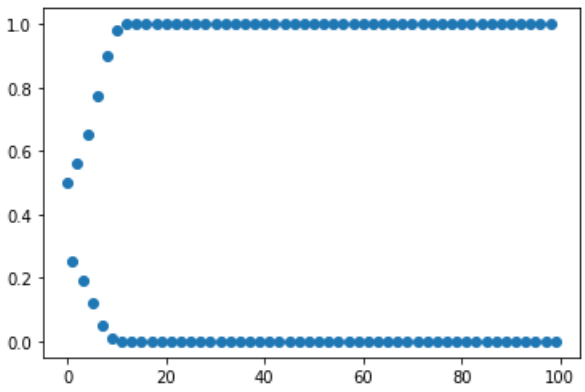


FIGURE 3 – Représentation graphique de $(u_n)_n$.

   Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) semblent converger vers des limites différentes et donc, (u_n) semble diverger.

   (b) On obtient :

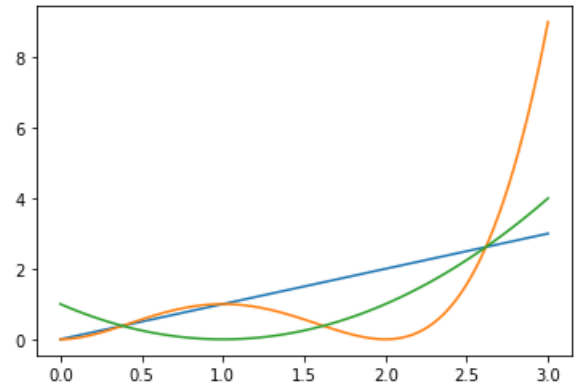


FIGURE 4 – En orange, courbe représentative de $f \circ f$.

   On conjecture que :

   — $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$; décroissante sur $[1,2]$;
   — 0, a, b et 1 sont des points fixes de $f \circ f$.

   (c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f \circ f(x) = \left((x-1)^2 - 1\right)^2 = x^2(x-2)^2.$$

   En particulier, $f \circ f$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f \circ f)'(x) = 2x(x-2)^2 + 2x^2(x-2) = 2x(x-2)(x-2+x) = 2x(x-2)(2x-2).$$

   On en déduit :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
Signe		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de $f \circ f$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Pour les points fixes : sont $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x \iff x^2(x-2)^2 = x &\iff x^2(x-2)^2 - x = 0 \\ &\iff x(x(x-2)^2 - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x(x-2)^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Or on peut remarquer que $x(x-2)^2-1 = (x-1)(x^2-3x+1) = (x-1)(f(x)-x)$ donc :

$$f \circ f(x) = x \iff x^2(x-2)^2 = x \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad f(x) = x.$$

Les points fixes de $f \circ f$ sont donc 0 , 1, a et b.

(d) Le tableau de variation montre que $[0,1]$ est stable par $f \circ f$. Comme u_0 et u_1 sont dans $[0,1]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$$

un raisonnement par récurrence montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_{2n} et u_{2n+1} sont dans $[0,1]$.

Ensuite en utilisant la croissance de $f \circ f$ sur $[0,1]$ on montre par récurrence que :

— si $u_0 \leq u_2$ alors pour tout n, $u_{2n} \leq u_{2(n+1)}$

— si $u_0 \geq u_2$ alors pour tout n, $u_{2n} \geq u_{2(n+1)}$.

D'où la monotonie de (u_{2n}).

La monotonie de (u_{2n+1}) se montre pareil. Par ailleurs, f étant décroissante sur $[0,1]$

— si $u_0 \leq u_2$ alors $u_1 \geq u_3$

— si $u_0 \geq u_2$ alors $u_1 \leq u_3$

si bien que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont de sens de monotonie contraire.

(e) Le suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées donc elles convergent vers une limite ℓ et ℓ' qui sont des points fixes de $f \circ f$.

Tous les termes étant dans $[0,1]$ ℓ et ℓ' le sont aussi si bien que :

$$\ell, \ell' \in \{0, 1, a\}.$$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = f(u_{2n})$ donc $\ell' = f(\ell)$.

— **Cas où** $u_0 \in]0, a[$. Alors comme $[0, a]$ est stable par $f \circ f$ (on s'en convainc facilement avec le tableau de variation) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [0, a]$.

Le signe de $f \circ f(x) - x$ sur $[0, a]$ (voir le graphique 4) donne alors :

$$u_0 \geq u_2.$$

Donc (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) croissante. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leq u_{2n} \leq u_0 < a$ alors $\ell = 0$.
Par suite $\ell' = f(\ell) = 1$.

— **Cas où** $u_0 \in]a, 1[$. Alors comme $[a, 1]$ est stable par $f \circ f$ (on s'en convainc facilement avec le tableau de variation) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a, 1]$.
Le signe de $f \circ f(x) - x$ sur $[a, 1]$ (voir le graphique 4) donne alors :

$$u_0 \leq u_2.$$

Donc (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) décroissante. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \geq u_{2n} \geq u_0 > a$ alors $\ell = 1$.
Par suite $\ell' = f(\ell) = 0$.

C'est cohérent avec le graphe.