Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2026-2027

BCPST2 – Mathématiques

DM2 – À rendre à la rentrée

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

1 Loi de Poisson

Lois de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :
  - **i)** $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
  - **ii)** $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors X possède une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

1. Apprendre cet encadré par cœur (c'est la fin du chapitre 5).

2. Montrer que cela défini bien une loi de variable aléatoire discrète, c'est-à-dire que :

— $\forall k \in \mathbb{N}, e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \geq 0$,

— $\displaystyle\sum_{k\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ converge et sa somme vaut 1.

3. Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

(a) Prouver que X possède bien une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

(b) Prouver que X possède bien une variance et que $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

2 Exercices

Faire les exercices 9 et 11 du TD5.

3 Problème (d'après un oral d'agro

Soit $x \in [\![2, 9]\!]$ et $y \in [\![1, 10]\!]$.
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune 10 tickets.
Parmi les 10 tickets de U_1, x portent la lettre « G ».
Parmi les 10 tickets de U_2, y portent la lettre « G ».
Deux joueurs J_1 et J_2 s'affrontent de la manière suivante :

— Le joueur J_1 commence et pioche simultanément deux tickets dans l'urne U_1. S'il tire deux tickets « G », il gagne et le jeu s'arrête.

— Si le joueur J_1 n'a pas gagné au tour précédent, le joueur J_2 tire un ticket dans l'urne U_2. S'il tire un ticket « G », il gagne et le jeu s'arrête.

Le jeu continue ainsi jusqu'à ce qu'un des deux joueurs gagne et mette fin à la partie.
Après chaque tour, les tickets sont remis dans les urnes.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit les événements :

— A_k : « le k-ième tirage de J_1 a lieu et J_1 tire deux tickets G » ;

— B_k : « le k-ième tirage de J_2 a lieu et J_2 tire un ticket G » ;

— E_k : « J_1 gagne à son k-ième tirage » ;

— F_k : « J_2 gagne à son k-ième tirage » ;

— E : « J_1 gagne » ;

— F : « J_2 gagne ».

1. Déterminer la probabilité p_1 que J_1 gagne lors de son premier tour et la probabilité p_2 que J_2 gagne lors de son premier tour sachant que J_1 a perdu au tour précédente.

2. **(a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer E_k à l'aide de certains des événements A_i et B_j.
En déduire $\mathbb{P}(E_k)$.

(b) Exprimer E à l'aide des événements E_k.
En déduire que $\mathbb{P}(E) = \dfrac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$.

(c) Montrer de même que $\mathbb{P}(F) = \dfrac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$.

(d) En déduire que la partie se finie presque sûrement.

3. On dit que le jeu est équitable lorsque les deux joueurs ont la même probabilité de gagner.

(a) Montrer que le jeu est équitable si et seulement si $y = f(x)$ où f est la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 9], \quad f(x) = \frac{10x(x-1)}{90 - x^2 + x}.$$

(b) Écrire un fonction Python qui prend en entrée une liste de réels de $[0, 9]$ et qui renvoie la liste des images de ces réels par la fonction f.

(c) Avec la fonction ci-dessus, déterminer tous les couples (x, y) tels que le jeu est équitable.