Chapitre 5

Variables aléatoires réelles discrètes

Dans tout le chapitre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

5.1 Variables aléatoires réelles discrètes

5.1.1 Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Rappel. Soit E un ensemble non vide.

- On dit que E est fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des éléments $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts tels que : $E = \{x_i \ , \ i \in [\![1, n]\!]\}$.
- On dit que E est dénombrable si $E = \{x_i \ , \ i \in \mathbb{N}\}$ avec les x_i deux à deux distincts.
- On dit que E est au plus dénombrable si E est fini ou dénombrable. Cela signifie qu'il existe une partie I de $\mathbb{N}$ tel que $E = \{x_i \ , \ i \in I\}$ avec les x_i deux à deux distincts.

Définition 5.1 (Variable aléatoire réelle discrète)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On dit que X est une variable aléatoire réelle discrète si son univers image

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \ , \ \omega \in \Omega\}$$

est au plus dénombrable.

Remarque 5.1. On distingue deux types de variables aléatoires réelles discrètes :

- les variables aléatoires d'univers image fini (étudiées en BCPST1),
- les variables aléatoires d'univers image dénombrable.

Exemple 5.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. Un variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n, p)$, $\mathcal{U}([\![0, n]\!])$ sont des variables aléatoires d'univers image fini donc sont des variables aléatoires discrètes.
2. On considère une urne contenant une boule noire et une boule blanche.
   On tire une boule au hasard (équiprobable) dans cette urne puis on la remet avec une boule supplémentaire de la même couleur.

On recommence jusqu'à l'obtention d'une boule noire puis on s'arrête.

On considère alors la variable aléatoire X donnant le nombre de tirages effectués avant l'arrêt.

Alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Proposition 5.1 (Système complet d'événements)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète et $I \subset N$ tel que $X(\Omega) = \{x_i \ , \ i \in I\}$ avec les x_i deux à deux distincts.
Alors la famille $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements.
En particulier, pour tout $B \in \mathcal{A}$, la série $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cup [X = x_i])$ converge et sa somme vaut $\mathbb{P}(B)$.

Définition 5.2 (Loi d'une variable aléatoire discrète)

Soit $(X, \Omega, \mathbb{P})$ une variable aléatoire discrète.
La loi de X est l'application $x \in X(\Omega) \longmapsto \mathbb{P}(X = x)$.

Exemple 5.2. On reprend l'exemple de l'urne précédent et on cherche à déterminer la loi de X.
On a vu que $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note B_i l'événement : « on a tiré une boule blanche lors du i-ième tirage ».
On a alors

$$[X = n] = B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}.$$

D'après la formule des probabilités composées, on en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(B_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(\overline{B_n}) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} \times \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [X = n]\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 0 \quad \text{(telescopage)}.$$

Remarque 5.2. On tolère qu'une variable aléatoire issue d'une expérience aléatoire puisse ne pas être définie sur un événement de probabilité nulle.
Ainsi on pourra, par abus, dire que la variable aléatoire X de l'exemple ci-dessus prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en omettant de mentionner qu'elle peut valoir $+\infty$ (car $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$).

Proposition 5.2 (Fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire discrète et posons $X(\Omega) = \{x_i \ , \ i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i\in I}$ est strictement croissante.

1. La fonction de répartition F_X de X est donnée par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \sum_{i\in I | x_i \leq t} \mathbb{P}(X = x_i).$$
(on rappelle qu'une somme vide est nulle).
2. Si $I = [\![0, N]\!]$ alors : $\forall i \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.
3. Si $I = \mathbb{N}$ alors : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.

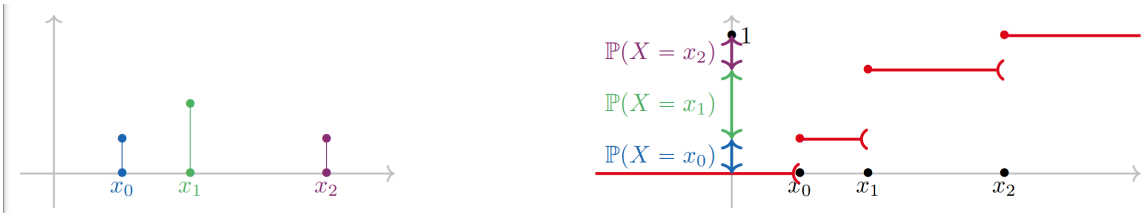


FIGURE 5.1 – À gauche : loi du variable X prenant 3 valeurs. À droite : fonction de répartition de X.

Preuve : Soit X une variable aléatoire discrète et posons $X(\Omega) = \{x_i \ , \ i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i\in I}$ est strictement croissante.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Il est clair que :
$$[X \leq t] = \bigcup_{i\in I | x_i \leq t} [X = x_i]$$
donc (par σ-additivité de $\mathbb{P}$) :
$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \sum_{i\in I | x_i \leq t} \mathbb{P}(X = x_i).$$

2. et 3. Supposons que $I = [\![0, N]\!]$ ou $I = \mathbb{N}$ et soit $j \in I \backslash \{0\}$.
Comme la suite $(x_i)_i$ est supposée croissante, on a :
$$\{i \in I \mid x_i \leq x_j\} = [\![0, j]\!].$$
Ainsi :
$$F_X(x_j) = \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_j) + \sum_{i=0}^{j-1} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_j) + F_X(x_{j-1}).$$
On obtient donc : $\mathbb{P}(X = x_j) = F_X(x_j) - F_X(x_{j-1})$.

□

Exemple 5.3.

1. Soit $p \in]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2, p)$. Tracer le graphe de F_X.

2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])$. Tracer le graphe de F_X.
3. On reprend l'exemple précédent de l'urne : soit X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} & \text{si } t \in [k, k+1[, k \in \mathbb{N}^* \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{k}{k+1} & \text{si } t \in [k, k+1[, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\lfloor t \rfloor}{\lfloor t \rfloor + 1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Exemple 5.4. Soit X une variable aléatoire discrète dont la fonction de répartition est :

$$F_X : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} \frac{1}{2^{k+1}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

Déterminer la loi de X.

On peut déjà constater que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ car F_X est nulle sur $]-\infty, 0]$.
De plus, F_X est constante sur chaque intervalle $[k, k+1[$, $k \in \mathbb{N}$: cela indique que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
En effet, si $t \notin \mathbb{N}$ alors, en posant $\lfloor t \rfloor = k < t$ on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(X = t) \leq \mathbb{P}(k < X \leq t) = F_X(t) - F_X(k) = 0.$$

Donc : $\mathbb{P}(X = t) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède on a :

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(n-1 < X \leq n) = F_X(n) - F_X(n-1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n+1}} & \text{si } n \geq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } n = 0. \end{cases} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Exemple 5.5 (Simulation informatique)**.** Le programme

```
1  def loi(Y,P):
2  """ Y : liste de réelle
3      P : une liste de même taille que L de réels positifs de somme 1
4  """
5          r = rd.rand()
6          for i in range(len(Y)):
7                  if r<P[i]:
8                          return Y[i]
9                  r = r-P[i]
```

simule une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\} \quad ; \quad \forall i, \quad \mathbb{P}(X = y_i) = \texttt{P}[i]$$

où $Y = [y_1, \dots, y_n]$.

Proposition 5.3

Soit $I \subset \mathbb{N}$, $(x_i)_{i\in I}$ une suite de réels deux à deux distincts et $(p_i)_{i\in I}$ une suite de **réels positifs** telle que :

$$\sum_{i\in I} p_i \quad \text{converge et sa somme vaut 1.}$$

Alors il existe une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que :

$$X(\Omega) = \{x_i \ , \ i \in I\} \quad ; \quad \forall i \in I, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$

Exemple 5.6. Déterminer le(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une variable aléatoire X vérifiant :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = k) = a3^{-k}.$$

D'après la proposition précédente, il suffit de trouver la ou les valeur(s) de a telle(s) que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ a3^{-k} \geq 0 \quad ; \quad \sum_{k\geq 1} a3^{-k} \text{ converge et sa somme vaut 1.}$$

La première condition impose $a \geq 0$.
Quant à la seconde, comme $\displaystyle\sum_{k\geq 1} 3^{-k}$ converge de somme $\dfrac{1}{2}$ alors $\displaystyle\sum_{k\geq 1} a3^{-k}$ et sa somme vaut $\dfrac{a}{2}$.
Ainsi la seule valeur qui convient est $a = 2$.

Proposition 5.4 (Transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

- $Y(\Omega) = \{g(x) \ ; \ x \in X(\Omega)\}$.
- $\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega) \ | \ g(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$.

5.1.2 Indépendance

Proposition 5.5

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

— Deux variables aléatoires discrètes X et Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P([X=x] \cap [Y=y]) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y).$$

— Des variables aléatoires discrètes $X_1,\ldots,X_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

— Des variables aléatoires discrètes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si toute sous famille finie vérifie le point ci-dessus.

Proposition 5.6 (Lemme des coalitions)

Soit $X_1,\ldots,X_n,X_{n+1},\ldots,X_{n+p}$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit $u : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $v : X_{n+1}(\Omega) \times \cdots \times X_{n+p}(\Omega) \to \mathbb{R}$.
Alors les variables aléatoires $u(X_1,\ldots,X_n)$ et $v(X_{n+1},\ldots,X_{n+p})$ sont indépendantes.

Remarque 5.3. Cette proposition peut s'étendre au cas de plusieurs fonctions.
Soit $[\![1,n]\!] = \bigcup_{k=1}^{p} I_k$ avec des I_k deux à deux disjoints et $u_1,\ldots,u_p$ des fonctions définies sur $\prod_{i\in I_1} X_i(\Omega),\ldots,\prod_{i\in I_p} X_i(\Omega)$ alors si $X_1,\ldots,X_n$ sont des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, les variables $u_1((X_i)_{i\in I_1}),\ldots,u_p((X_i)_{i\in I_p})$ le sont aussi.

Exemple 5.7. Soit $X_1,\ldots,X_5$ mutuellement indépendantes.
Alors $X_1 e^{X_3}, X_2 + 3X_4, X_5^2$ sont mutuellement indépendantes.

5.2 Moments, espérance et variance

5.2.1 Espérance

Définition 5.3 (Espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Si X est discrète d'univers image fini, on appelle **espérance** de X et on note $\mathbb{E}(X)$, le nombre défini par
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$
- Si X est discrète d'univers image infini, on dit que X **admet une espérance** si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente. Dans ce cas, l'**espérance** de X, notée $\mathbb{E}(X)$ est la somme de cette série :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

Remarque 5.4.

1. Une variable aléatoire discrète d'**univers image fini** possède donc toujours une espérance.
2. Une variable aléatoire discrète d'**univers image infini** ne possède pas nécessairement une espérance : l'hypothèse de convergence absolue est fondamentale.

Exemple 5.8.

1. On considère la variable aléatoire X de l'exemple 5.6. Montrer que X possède une espérance et la déterminer.
La série $\sum_{n \geq 1} n\frac{2}{3^n}$ est absolument convergente (à un facteur $\frac{2}{3}$ près, il s'agit d'une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3}$) donc X possède une espérance et
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$
2. S X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$
Alors la série $\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(X = n)$ est divergente donc X ne possède pas d'espérance.

Proposition 5.7

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant une espérance.

1. *Linéarité* : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aX+bY$ possède une espérance et $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
2. *Positivité* : si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
3. *Croissance* : si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leq E(Y)$.
4. Si de plus X et Y sont indépendantes alors XY possède une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Preuve : Admis. □

Corollaire 1

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes et possédant toutes une espérance.
Alors $\prod_{i=1}^{n} X_i$ possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

Preuve : On procède par récurrence.

— **Initialisation :** c'est le dernier point de la proposition précédente.

— **Hérédité :** soit $n \geq 2$ et supposons que la propriété est vraie pour tout n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes possédant une espérance.
Soit $(X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes possédant une espérance.
D'après le lemme des coalitions, les variables $\prod_{i=1}^{n} X_i$ et X_{n+1} sont indépendantes et par hypothèse de récurrence $\prod_{i=1}^{n} X_i$ possède une espérance égale à $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$.
La proposition précédente permet de conclure que $\prod_{i=1}^{n+1} X_i = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \times X_{n+1}$ possède une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n+1} X_i) = \mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} X_i)\mathbb{E}(X_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_i).$$

□

Théorème 5.1 (Transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$.
Alors la variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X=x)$ est absolument convergente. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X=x).$$

Preuve : Admis. □

Remarque 5.5. Si X est **d'univers image fini** alors $g(X)$ possède toujours une espérance.

Exemple 5.9. Soit X la variable aléatoire du test 5.6. Montrer que $\mathbb{E}(X(X-1))$ existe et la calculer.
La série $\sum_{n\geq 1} n(n-1)\frac{2}{3^n}$ est absolument convergente (à un facteur $\frac{2}{9}$ près, il s'agit d'une série géométrique dérivée seconde de raison $\frac{1}{3}$) donc $\mathbb{E}(X(X-1))$ existe et

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\frac{2}{3^n} = \frac{2}{9}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{3^{n-2}} = \frac{2}{9}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{3}{2}.$$

5.2.2 Moments

Définition 5.4 (Moments d'ordre r)

Soient $r \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X possède un **moment d'ordre** r si X^r possède une espérance. On note alors

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

Remarque 5.6. Si X est **d'univers image fini** alors X possède des moments de tout ordre.

Proposition 5.8

Soit X une variable aléatoire discrète possédant une moment d'ordre 2.
Alors X possède une espérance.

Preuve : On suppose que $\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X=x)$ converge absolument.
Soit $x \in X(\Omega)$. Comme x est réel, alors :

$$(|x|-1)^2 \geq 0 \quad \text{ce qui se réécrit } |x| \leq \frac{x^2+1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in X(\Omega)$:

$$|x\mathbb{P}(X=x)| = |x|\mathbb{P}(X=x) \leq \frac{1}{2}\left(x^2\mathbb{P}(X=x) + \mathbb{P}(X=x)\right).$$

Or les séries $\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X=x)$ et $\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)$ sont convergentes donc par comparaison la série $\sum_{x\in X(\Omega)} |x\mathbb{P}(X=x)|$ l'est aussi.
Ainsi X possède une espérance. □

Définition 5.5 (Variance)

Soit X une variable aléatoire discrète possédant un moment d'ordre 2. Alors :

- $(X - \mathbb{E}(X))^2$ possède une espérance appelée la **variance** de X et notée $\mathbb{V}(X)$;
- $\mathbb{V}(X) \geq 0$ et on appelle **écart-type** de X, notée $\sigma(X)$, est le réel défini par : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Preuve : Comme X possède un moment d'ordre 2, elle possède une espérance.
Or $(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$ donc possède une espérance par linéarité.
La propriété de positivité de l'espérance entraîne que $\mathbb{V}(X) \geq 0$. □

Remarque 5.7. La variance représente la moyenne des écarts quadratiques à l'espérance : elle mesure la dispersion par rapport à l'espérance.

Proposition 5.9

Soit X une variable aléatoire discrète possédant une variance. Alors :

1. $\mathbb{V}(X) \geq 0$ avec égalité si et seulement si X suit une loi certaine, égale à $\mathbb{E}(X)$.
2. pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(aX+b)$ existe et $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
3. Formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Preuve : Soit X une variable aléatoire discrète possédant une variance.

1. La positivité est une conséquence de la positivité de l'espérance.
   On sait qu'une somme de nombres réels positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul donc :

$$\sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{V}(X) = 0 \iff \forall x \in X(\Omega) \quad (x-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x) = 0$$
$$\iff \forall x \in X(\Omega) \quad (x-\mathbb{E}(X))^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(X=x) = 0$$
$$\iff \forall x \in X(\Omega) \quad x = \mathbb{E}(X) \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(X=x) = 0.$$

   En particulier, $X = \mathbb{E}(X)$ presque surement.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2.$$
   Or X possède un moment d'ordre 2 donc une espérance et ainsi, par linéarité, $(aX+b)^2$ possède une espérance.

Donc $aX+b$ possède une variance. De plus, par linéarité :

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}((aX+b-a\mathbb{E}(X)-b)^2) = \mathbb{E}((a(X-\mathbb{E}(X))^2) &= a^2\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)\\ &= a^2\mathbb{V}(X).\end{aligned}$$

3. On a : $(X-\mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$.
   Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.\end{aligned}$$

□

Définition 5.6

Soit X une variable aléatoire discrète possédant une variance non nulle.
La variable aléatoire $X^\star = \dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée la variable aléatoire centrée-réduite associée à X. Elle est :

1. **centrée** c'est-à-dire que son espérance est nulle ;
2. **réduite** c'est-à-dire que sa variance vaut 1.

Proposition 5.10

Soit $n \geq 2$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et possédant un moment d'ordre 2.
Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ possède une variance et :

$$\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

Preuve : Par récurrence.

— **Initialisation** : soit X_1 et X_2 indépendantes possédant une variance.
On a : $(X_1+X_2)^2 = X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2$.
Or X_1 et X_2 possèdent un moment d'ordre deux et, comme X_1 et X_2 sont indépendantes et possèdent une espérance, X_1X_2 possède une espérance.
Ainsi, par linéarité, $(X_1+X_2)^2$ possède une espérance et :

$$\mathbb{E}((X_1+X_2)^2) = \mathbb{E}(X_1^2) + 2\mathbb{E}(X_1X_2) + \mathbb{E}(X_2^2) = \mathbb{E}(X_1^2) + 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_2^2).$$

En particulier, X_1+X_2 possède un moment d'ordre 2 donc une variance et par la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1+X_2) &= \mathbb{E}((X_1+X_2)^2) - \mathbb{E}(X_1+X_2)^2\\ &= \mathbb{E}(X_1^2) + 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_2^2) - (\mathbb{E}(X_1)^2 + 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_2)^2)\\ &= \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_2)^2)\\ &= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2).\end{aligned}$$

— **Hérédité :** soit $n \geq 2$ et supposons la propriété vérifiée au rang n. Soit $X_1, \dots, X_{n+1}$ mutuellement indépendantes possédant un moment d'ordre 2.
Par hypothèse de récurrence : $X_1 + \cdots + X_n$ possède une variance et :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n).$$

D'autre part le lemme des coalitions assure que $X_1 + \cdots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes donc d'après l'initialisation :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1}) = \mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) + \mathbb{V}(X_{n+1} = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n) + \mathbb{V}(X_{n+1}).$$

□

5.2.3 Inégalités probabilistes

Soit X une variable aléatoire réelle (discrète). On sait que :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0.$$

Peut-on préciser la vitesse de convergence vers 0 ?

Théorème 5.2 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire discrète **positive** et possédant une espérance.
Alors pour tout réel $a > 0$ on a :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Preuve : Soit X une variable aléatoire discrète **positive** et possédant une espérance et soit $a > 0$.
On note $\mathbb{1}_{[X \geq a]}$ la fonction définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{[X \geq a]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in [X \geq a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\omega \in \Omega$.

— Si $X(\omega) \geq a$ alors $\mathbb{1}_{[X \geq a]}(\omega) = 1$ donc :

$$a\mathbb{1}_{[X \geq a]}(\omega) = a \leq X(\omega).$$

— Si $X(\omega) < a$ alors $\mathbb{1}_{[X \geq a]}(\omega) = 0$ donc :

$$a\mathbb{1}_{[X \geq a]}(\omega) = 0 \leq X(\omega)$$

car X est positive.

Ainsi dans tous les cas : $a\mathbb{1}_{[X \geq a]}(\omega) \leq X(\omega)$.
Par croissance de l'espérance on en déduit :

$$a\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[X \geq a]}) \leq \mathbb{E}(X).$$

Or $\mathbb{1}_{[X \geq a]}$ est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X \geq a)$ donc

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[X \geq a]}) = \mathbb{P}(X \geq a).$$

Ainsi :

$$a\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X).$$

□

Remarque 5.8.

1. L'inégalité de Markov n'a d'intérêt que pour de grandes valeurs de a. En effet, si $a \leq \mathbb{E}(X)$ alors :
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq 1 \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$
2. Cette inégalité est souvent grossière comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 5.10. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Alors pour tout $a > 1$ on a :
$$P(X \geq a) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{E}(X)}{a} = \frac{p}{a}.$$

Exemple 5.11 (Amélioration de l'inégalité de Markov)**.** Soit X une variable aléatoire discrète.

1. Si X possède un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Alors en appliquant l'inégalité de Markov à $|X|^n$ on a :
$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|X| \geq a) = \mathbb{P}(|X|^n \geq a^n) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^n)}{a^n}.$$
2. Si e^X possède une espérance alors :
$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^X \geq e^a) \leq \frac{\mathbb{E}(e^X)}{e^a}.$$

Théorème 5.3 (Inégalité de Bienaymée-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle possédant une variance. Alors :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$.
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq \varepsilon^2)$$
et l'inégalité découle alors de l'inégalité de Markov appliquée à $|X - \mathbb{E}(X)|^2$. □

Remarque 5.9.

1. L'inégalité de Bienaymée-Tchebychev est souvent grossière également.
2. Il s'agit d'une inégalité de déviation par rapport à l'espérance : on retrouve le fait que la variance contrôle l'écart à l'espérance.

5.3 Lois usuelles

5.3.1 Lois certaines

Loi certaine

- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi certaine si elle ne prend qu'une seule valeur $a \in \mathbb{R}$:
$$X(\Omega) = \{a\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = a) = 1.$$
- Si X suit une loi certaine avec $X(\Omega) = \{a\}$ alors
$$\mathbb{E}(X) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0.$$
- Une variable aléatoire X suit une loi certaine si et seulement si $\mathbb{V}(X) = 0$.

5.3.2 Lois de Bernoulli

Lois de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si :
  i) $X(\Omega) = \{0,1\}$,
  ii) $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors
$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1-p).$$

Exemple 5.12 (**Expérience de référence**). On considère une expérience aléatoire possédant deux issues. L'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité $p \in]0,1[$; l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1-p$ (une telle expérience est appelée une épreuve de Bernoulli).
La variable aléatoire X égale à 1 en cas de succès et à 0 en cas d'échec suit une loi $\mathcal{B}(p)$.

Exemple 5.13. On lance une pièce ayant probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur Pile et $1-p$ de tomber sur Face. On note X la variable aléatoire égale à 1 si on obtient Pile et à 0 si on obtient Face . Alors :

— $X(\Omega) = \{0,1\}$,
— $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemple 5.14 (**Fonction indicatrice**). Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement. On note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

Exemple 5.15 (**Simulation**). On rappelle que la commande `rd.rand()` du module `numpy.random` tire un réel de $[0,1[$ au hasard selon la loi suivante

$$\text{pour tout intervalle } I \subset [0,1], \quad \mathbb{P}(\texttt{rd.rand()} \in I) = \text{longueur}(I).$$

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simule_Bernoulli(p):
4         if rd.rand()<p:
5                 return 1
6         else:
7                 return 0
```

5.3.3 Lois binomiales

Lois binomiales

Soient $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de binomiale de paramètres n et p, et on note
  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si :
  i) $X(\Omega) = \{0,1,\dots,n\}$,
  ii) $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors
$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Exemple 5.16 (**Expérience de référence**). On considère une expérience aléatoire qui consiste à répéter n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 5.17. On considère une pièce ayant probabilité p de tomber sur Pile et $1-p$ de tomber sur Face. On lance n fois consécutives et indépendantes cette pièce et on note X la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus . Alors

— $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^n$,
— $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
— pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:
  i) le nombre d'issues réalisant $[X=k]$ consiste en un choix de k lancers (ceux qui donneront pile) : il y a $\binom{n}{k}$ choix ;
  ii) par indépendance des lancers, la probabilité pour qu'une des issues ci-dessus arrive est $p^k(1-p)^{n-k}$;
  iii) donc finalement $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1_p)^{n-k}$.

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 5.18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier tir est p et celle de toucher la cible au second tir est aussi égale à p. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note A la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et B la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs.

1. Donner la loi de A.

   Il s'agit de répéter n fois de manière indépendante l'épreuve de Bernoulli donc le succès est « toucher la cible au premier et au deuxième coup ».

   Ainsi A suit la loi binomiale de paramètres n et p^2.

2. Donner la loi de B.

   Il s'agit de répéter n fois de manière indépendante l'épreuve de Bernoulli donc le succès est « toucher la cible lors d'un seul des deux tirs ».

   Ainsi B suit la loi binomiale de paramètres n et $2p(1-p)$.

Exemple 5.19 (**Simulation**). On rappelle que la commande `rd.rand()` du module `numpy.random` tire un réel de $[0,1[$ au hasard selon la loi suivante

$$\text{pour tout intervalle } I \subset [0,1], \quad \mathbb{P}(\texttt{rd.rand()} \in I) = \text{longueur}(I).$$

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simule_Binomiale(n,p):
4         s = 0
5         for k in range(n):
6                 s+=simule_Bernoulli(p)
7         return s
```

5.3.4 Lois uniformes

Lois uniformes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ si :
  i) $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$,
  ii) $\forall k \in [\![1,n]\!], \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{n}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exemple 5.20 (**Expérience de référence**). On considère une expérience aléatoire qui possède n issues différentes numérotées de 1 à n qui sont équiprobables.
La variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue suit une loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

Exemple 5.21 (Simulation). On rappelle que la commande `rd.rand()` du module `numpy.random` tire un réel de $[0,1[$ au hasard selon la loi suivante

$$\text{pour tout intervalle } I \subset [0,1], \quad \mathbb{P}(\texttt{rd.rand()} \in I) = \text{longueur}(I).$$

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simule_uniforme(n):
4         u = rd.rand()
5         for k in range(n):
6                 if k/n<= u <(k+1)/n:
7                         return k+1
```

Remarque 5.10. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $a < b$.

— On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de uniforme sur $[\![a,b]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ si :

i) $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$,

ii) $\forall k \in [\![a,b]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{b-a+1}$.

— Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

5.3.5 Lois géométriques

Lois géométriques

Soit $p \in]0,1[$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de géométrique de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :

  i) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

  ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Preuve :

- Montrons que cela définit bien une variable aléatoire c'est-à-dire que :
  — $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(1-p)^{k-1} \geq 0$
  — $\displaystyle\sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}$ converge et sa somme vaut 1.

  La positivité est claire puisque $p \in]0,1[$.

  La série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}$ est une série géométrique de raison $1-p \in]0,1[$ donc elle converge et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^i = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

  Montrons que X possède une espérance, c'est-à-dire, montrons que $\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument.

  Il s'agit d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $1-p \in]0,1[$ donc elle converge absolument (les termes sont positifs). Ainsi X possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

  Montrons que X possède un moment d'ordre 2, c'est-à-dire, montrons que $\sum_{k\geq 1} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument.

  Pour tout $k \geq 1$:

$$k^2\mathbb{P}(X=k) = p(k(k-1)+k)(1-p)^{k-1} = pk(1-p)^{k-1} + p(1-p)k(k-1)p^{k-2}.$$

  Il s'agit d'une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 de raison $1-p \in]0,1[$ donc elle converge absolument (les termes sont positifs). Ainsi X possède un moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}(X^2) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} + p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2} = \frac{1}{p} + \frac{2p(1-p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

  En particulier, X possède une variance et par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

□

Exemple 5.22 (**Expérience de référence**)**.** On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
La variable aléatoire X donnant le rang du premier succès obtenu suit une loi $\mathcal{G}(p)$.

Exemple 5.23. On considère une pièce ayant probabilité p de tomber sur Pile et $1-p$ de tomber sur Face. On lance la pièce une infinité de fois consécutives de façon indépendante et note X la variable égale au rang de la première apparition d'un Pile. Alors

— $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^{\mathbb{N}^*}$,

— $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

— i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$[X=k] =$$

où $F_i =$« obtenir Face au i-ème lancer » et $P_i =$« obtenir Pile au i-ème lancer ».

ii) Par indépendance des lancers

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k)\\ &= \mathbb{P}(F_1)\cdot\mathbb{P}(F_2)\cdot\cdots\cdot\mathbb{P}(F_{k-1})\cdot\mathbb{P}(P_k)\\ &= (1-p)^{k-1}p.\end{aligned}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 5.24 (Simulation d'une loi géométrique). En utilisant la fonction `simule_Bernoulli` préalablement définie :

```
def simul_geo(p):
    s = 0
    while Bernoulli(p)==0:
        s+=1
    return s+1
```

Proposition 5.11 (Absence de mémoire)

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. Alors, pour tout $(s,t) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on a :

$$\mathbb{P}(X > t+s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$

Preuve : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $[X > k] = \bigcup_{k+1}^{+\infty} [X = i]$ alors par σ-additivité de $\mathbb{P}$ on sait que :

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} p(1-p)^{j+k} = p(1-p)^k \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j = (1-p)^k.$$

Soit $(s,t) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors d'une part :

$$\mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t) = (1-p)^s (1-p)^{=} (1-p)^{s+t}.$$

D'autre par :

$$\mathbb{P}(X < s+t) = (1-p)^{s+t}.$$

□

5.3.6 Lois de Poisson

Lois de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :
  i) $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
  ii) $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors
$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Preuve :

- Montrons que cela définit bien une variable aléatoire c'est-à-dire que :
  — $\forall k \in \mathbb{N}, e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \geq 0$

— $\sum_{k\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ converge et sa somme vaut 1.

La positivité est claire.

La série $\sum_{k\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ est une série exponentielle donc elle converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

  Montrons que X possède une espérance, c'est-à-dire, montrons que $\sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument.

  Pour tout $k \geq 1$ on a :

$$k\mathbb{P}(X=k) = \lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

  Il s'agit du terme général d'une série exponentielle donc absolument convergente (les termes sont positifs). Ainsi X possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = 0 + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

  Montrons que X possède un moment d'ordre 2, c'est-à-dire, montrons que $\sum_{k\geq 0} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument.

  Pour tout $k \geq 2$:

$$k^2\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}(k(k-1)+k)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

  Il s'agit d'une combinaison linéaire de séries exponentielle donc elle converge absolument (les termes sont positifs). Ainsi X possède un moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 0 + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!} + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\\ &= \lambda + \lambda^2\end{aligned}$$

  En particulier, X possède une variance et par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

□

Exemple 5.25. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer, si elles existent, $\mathbb{E}(e^{-X})$ et $\mathbb{V}(e^{-X})$.

1. Pour l'espérance : on considère la série $\sum_{k\geq 0} e^{-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n} e^{-k}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda e^{-1})^k}{k!}.$$

   On reconnaît à droite la somme partielle d'indice n d'une série exponentielle (qui converge). Par conséquent, la série $\sum_{k\geq 0} e^{-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ est convergente donc absolue convergente car ses termes sont positifs. De plus, sa somme vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{-1})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{-1}} = e^{\lambda(e^{-1}-1)}.$$

   Ainsi, $\mathbb{E}(e^{-X})$ existe et vaut $e^{\lambda(e^{-1}-1)}$.

2. Pour la variance : on considère la série $\sum_{k\geq 0}\left(e^{-k}\right)^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-k}\right)^2 2e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n} e^{-2k}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda e^{-2})^k}{k!}.$$

   On reconnaît à droite la somme partielle d'indice n d'une série exponentielle (qui converge). Par conséquent, la série $\sum_{k\geq 0}\left(e^{-k}\right)^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ est convergente donc absolue convergente car ses termes sont positifs et sa somme vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{-2})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{-2}} = e^{\lambda(e^{-2}-1)}.$$

   Ainsi, e^{-X} possède un moment d'ordre 2. Par la formule de Koenig-Huygens, e^{-X} possède une variance et

$$\mathbb{V}(e^{-X}) = \mathbb{E}\left(\left(e^{-X}\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(e^{-X}\right)^2 = e^{\lambda(e^{-2}-1)} - e^{2\lambda(e^{-1}-1)}.$$