Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2026-2027

BCPST2 – Mathématiques

DS4-3h30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Questions de cours

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} n^2\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} &= \frac{1}{3} \times (n^2 - n + n) \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} \times n(n-1)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2} - \frac{1}{3} \times n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

.

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} n^2\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ est combinaison linéaire des séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 de raison $\frac{-1}{3}$ qui sont convergentes (car $\frac{-1}{3} \in]-1,1[$).
Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} n^2\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ converge et déterminer sa somme est :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} &= \frac{1}{27}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{1}{9}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2}{4^3} - \frac{1}{4^2} \\ &= -\frac{1}{32}. \end{aligned}$$

2. Par équivalent usuel, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$ alors :

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Par compatibilité des équivalents avec la valeur absolue, on a :

$$\left|\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Comme les séries $\sum_{n\geq 1}\left|\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right|$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs, d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit qu'elles sont de même nature.

Or on sait que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente. Donc $\sum_{n\geq 1}\left|\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right|$ est convergente aussi.

Cela signifie que la série $\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est absolument convergente. En particulier, elle est convergente.

Exercice 1 (Agro 2016)

On considère la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n}$ et on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de ses sommes partielles.

1. **(a)** Pour tout $n \geq 3$ on a par croissance de la fonction logarithme :

$$\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(3)}{n} \geq \frac{\ln(e)}{n} = \frac{1}{n} \geq 0.$$

Or la série harmonique est divergente donc d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n}$ diverge aussi..

(b) Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n}$ est à termes positifs, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est croissante.

Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est divergente.

D'après le théorème de convergence monotone, on en conclut que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

(c) **Python**. Écrire une fonction python qui prend en entrée un réel positif A et renvoie la valeur du premier indice n pour lequel $S_n > A$.

```
1 def question1(A):
2         S = 0
3         n = 0
4         while S<= A:
5                 n += 1
6                 S += np.log(n)/n
7         return n
```

2. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

(a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et poi=ur tout $x > 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

On en déduit :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

(b) Soit $k \geq 4$. Les intervalles $[k, k+1]$ et $[k-1, k]$ sont alors inclus dans $[e,+\infty[$ sur lequel f est décroissante. Ainsi :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad f(x) \leq f(k)$$

et

$$\forall x \in [k-1, k], \quad f(k) \leq f(x).$$

En intégrant ces inégalités entre $[k, k+1]$ et $[k-1, k]$ on obtient, par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k)(k+1-k) = f(k) = \frac{\ln(k)}{k}$$

et

$$\frac{\ln(k)}{k} = \int_{k-1}^{k} f(k)dx \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

On a donc :

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

(c) Soit $n \geq 4$. En sommant l'inégalité précédente pour k allant de 4 à n, on a :

$$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leq \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

Or, par la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_4^{n+1} f(x)dx = \left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_4^{n+1} = \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(4)^2}{2}$$

et de même :

$$\sum_{k=4}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_3^n f(x)dx = \left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_3^n = \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}.$$

Ainsi :

$$\frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(4)^2}{2} \leq \sum_{k=4}^{n}\frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}.$$

En posant $a = \dfrac{\ln(4)^2}{2}$, $b = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} f(k)$ et $c = \dfrac{\ln(3)^2}{2}$, on a bien :

$$\frac{\ln(n+1)^2}{2} - a \leq S_n - b \leq \frac{\ln(n)^2}{2} - c.$$

(d) Soit $n \geq 4$. En divisant membre à membre par $\dfrac{\ln(n)^2}{2}$, on obtient :

$$\frac{\ln(n+1)^2}{\ln(n)^2} + \frac{2(b-a)}{\ln(n)^2} \leq \frac{2S_n}{\ln(n)^2} \leq 1 + \frac{2(c-a)}{\ln(n)^2}.$$

Le membre de droite tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
D'autre part, pour tout $n \geq 4$:

$$\frac{\ln(n+1)^2}{\ln(n)^2} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2}{\ln(n)^2} = \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On en déduit, par opération sur les limites, que le membre de gauche tend également vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2S_n}{\ln(n)^2} = 1.$$

Ainsi : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)^2}{2}$.

3. Soit u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

(a) Soit $n \geq 3$, on a : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} - S_n + \frac{\ln(n)^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} + \frac{\ln(n)^2}{2} \end{aligned}$$

Or, en utilisant la question 2b avec $k = n+1 \geq 4$ on trouve :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx = \left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_n^{n+1}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

On en déduit alors que : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(b) D'après la question précédente, la suite u est décroissante à partir du rang $n = 3$.

D'après la question **2.(c)**, on sait également que pour tout $n \geq 4$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)^2}{2} - a \leq S_n - b$$

donc, en ajoutant $b - \dfrac{\ln(n)^2}{2}$ membre à membre on obtient

$$\forall n \geq 4, \quad \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2} + b - a \leq u_n.$$

La croissance de la fonction logarithme permet alors de conclure :

$$\forall n \geq 4, \quad b - a \leq u_n.$$

Ainsi la suite u est minorée.

Étant décroissante et minorée, d'après le théorème de la limite monotone, u est convergente.

4. On considère désormais la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— On a d'une part :

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} \\ &= (-1)^{2n+1}\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + (-1)^{2n}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\ &= \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car f est décroissante sur $[e, +\infty[$ et $2n+2 \geq 2n+1 \geq 3 \geq e$.

De même :

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \sum_{k=1}^{2(n+1)+1} (-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} \\ &= (-1)^{2n+2}\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + (-1)^{2n+1}\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &= \frac{\ln(2n+3)}{2n+3} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

car f est décroissante sur $[e, +\infty[$ et $2n+3 \geq 2n+2 \geq e$.

— D'autre part :

$$W_n - V_n = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissance comparée.

Les suites U et V sont donc adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers une même limite ℓ.

Comme il s'agit des suites extraites d'ordre pair et impair de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on en déduit que cette suite converge vers ℓ également.

Cela signifie que la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}$ est convergente et que sa somme est ℓ.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$:

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

— **Initialisation :** pour $n = 1$ on a d'une part :

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} = -\frac{\ln(2)}{2}$$

et d'autre part :

$$S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{\ln(2)}{2} - \ln(2) = . - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité :**soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
&= S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \quad \text{(HR)} \\
&= S_{2n+2} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - S_{n+1} + \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
&\quad - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
&= S_{2(n+1)} - S_{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(2n+2)}{n+1} + \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
&= S_{2(n+1)} - S_{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(2)+\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
&= S_{2(n+1)} - S_{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'après la question précédente, en notant $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(2)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) &= S_{2n} - S_n - A_n - \ln(2)\ln(n) \\
&= u_{2n} + \frac{\ln(2n)^2}{2} - u_n - \frac{\ln(n)^2}{2} - A_n - \ln(2)\ln(n) \\
&= u_{2n} + \frac{(\ln(2)+\ln(n))^2}{2} - u_n - \frac{\ln(n)^2}{2} - A_n - \ln(2)\ln(n) \\
&= u_{2n} - u_n + \frac{\ln(2)^2}{2} - A_n.
\end{aligned}$$

Or on sait que la suite u converge donc $(u_{2n} - u_n)_n$ converge vers 0 , et (A_n) converge vers ℓ. Ainsi, on en déduit par somme que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est :

$$\frac{\ln(2)^2}{2} - \frac{\ell}{\ln(2)}.$$

Exercice 2

Soit φ et ψ les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t} - t(e^{\frac{1}{t}} - 1) \quad ; \quad \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$

Soit $f : (x, y) \longmapsto e^{y\ln(x)} - e^{x\ln(y)}$

1. La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\psi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2}.$$

Or, le discriminant Δ de $t \mapsto t^2 - t + 1$ est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 < 0.$$

Donc $t \mapsto t^2 - t + 1$ ne s'annule et est donc de signe constant (TVI), en l'occurrence strcitement positif.

Ainsi, ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs $\psi(1) = 0$ donc ψ est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$.

2. **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = 1 - \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n-1}{n!}$ converge et sa somme vaut 1.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} &= \frac{t^{n-1}}{n!} - \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{n-1}}{n!} - \frac{\ln(t^{n-1})}{n!} \\ &= \frac{1}{t}\frac{t^n}{n!} - t\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^n}{n!} - \ln(t)\frac{n-1}{n!}. \end{aligned}$$

Les séries exponentielles $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^n}{n!}$ étant convergentes et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n-1}{n!}$ aussi d'après la question précédente, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ est combinaison linéaire de séries convergente, donc elle est convergente.

De plus :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} &= \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} - t\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^n}{n!} - \ln(t)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} \\ &= \frac{1}{t}(e^t - 1) + t(e^{\frac{1}{t}} - 1) - \ln(t) \\ &= \varphi(t) - \ln(t). \end{aligned}$$

(c) Soit $t \in]0,1[$. Pour tout $n \geq 1$, $t^{n-1} \in]0,1]$ donc d'après la question **1.**, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ est à termes négatifs et même strictement négatifs à partir du rang $n = 2$. Ainsi sa somme est strictement négative :

$$\varphi(t) - \ln(t) < 0 \quad i.e. \quad \varphi(t) < \ln(t).$$

Soit $t > 1$. Pour tout $n \geq 1$, $t^{n-1} \geq 1$ (et l'inégalité est stricte pour $n \geq 2$) donc d'après la question **1.**, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ est à termes positifs et même strictement positifs à partir du rang $n = 2$. Ainsi sa somme est strictement positive :

$$\varphi(t) - \ln(t) > 0 \quad i.e. \quad \varphi(t) > \ln(t).$$

3. (a) À cause du logarithme, on trouve $U =]0,+\infty[^2$.
Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont de classe C^1 sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction logarithme est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition, les fonctions $(x,y) \mapsto \ln(x)$ et $(x,y) \mapsto \ln(y)$ sont de classe C^1 sur U.
Par produit, les fonctions $(x,y) \mapsto y\ln(x)$ et $(x,y) \mapsto x\ln(y)$ sont de classe C^1 sur U.
En composant avec la fonction exp qui est de classe C^1 puis par somme, on Ensuite, par opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

(b) Soit $(x,y) \in U$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}e^{y\ln(x)} - \ln(y)e^{x\ln(y)} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)e^{y\ln(x)} - \frac{x}{y}e^{x\ln(y)}.$$

4. (a) Soit $(x,y) \in U$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{y}{x}e^{y\ln(x)} - \ln(y)e^{x\ln(y)} &=& 0 \\ \ln(x)e^{y\ln(x)} - \dfrac{x}{y}e^{x\ln(y)} &=& 0 \end{array}\right.$$

Or $e^{y\ln(x)} = x^y$ et $e^{x\ln(y)} = y^x$ donc

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} yx^{y-1} - \ln(y)y^x &=& 0 \\ \ln(x)x^y - xy^{x-1} &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^{y-1} &=& \ln(y)y^{x-1} \\ \ln(x)x^{y-1} &=& y^{x-1} \end{array}\right. \quad (\text{car } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^{y-1} &=& \ln(y)\ln(x)x^{y-1} \\ \ln(x)x^{y-1} &=& y^{x-1} \end{array}\right. \quad (\text{par substitution}) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& \ln(y)\ln(x) \\ \ln(x)x^{y-1} &=& y^{x-1} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Enfin, comme $x > 0$ et $y > 0$ alors la deuxième équation entraîne que $\ln(x) > 0$ *i.e.* $x > 1$. La première équation implique que $\ln(y)$ est du même signe que $\ln(x)$ *i.e.* $y > 1$.

Ainsi

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & = & \ln(y)\ln(x) \\ \ln(x)x^{y-1} & = & y^{x-1} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{c} x > 1 \quad \text{et} \quad y > 1 \\ \ln(x)\ln(y) = 1 \\ y^{x-1} = x^{y-1}\ln(x) \end{array} \right.$$

La réciproque de la dernière implication étant évidente, on a montré,que (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{c} x > 1 \quad \text{et} \quad y > 1 \\ \ln(x)\ln(y) = 1 \\ y^{x-1} = x^{y-1}\ln(x) \end{array} \right. .$$

(b) Soit $(x,y) \in U$ un point critique de f. D'après la question précédente $x > 1$ donc en posant $t = \ln(x) > 0$ on a

$$x = e^t.$$

Par ailleurs, on sait que $\ln(x)\ln(y) = 1$ *i.e.* $\ln(y) = \dfrac{1}{t}$. Ainsi :

$$y = e^{\frac{1}{t}}.$$

Enfin, on a :

$$y^{x-1} = e^{\frac{1}{t}(e^t-1)} \quad \text{et} \quad x^{y-1}\ln(x) = e^{t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}t.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y^{x-1} = x^{y-1}\ln(x) &\iff e^{\frac{1}{t}(e^t-1)} = e^{t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}t \\ &\iff \frac{1}{t}(e^t-1) = t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right) + \ln(t) \quad \text{(en passant au logarithme)} \\ &\iff \varphi(t) = \ln(t). \end{aligned}$$

Ainsi $t = \ln(x)$ convient.

(c) Soit $(x,y) \in U$ un point critique de f et $t > 0$ comme dans la question précédente.

Comme $\varphi(t) = \ln(t)$ alors d'après la question **2.(c)**, nécessairement $t = 1$. Alors

$$x = e^t = e \quad ; \quad y = e^{\frac{1}{t}} = e.$$

Réciproquement, on vérifie grâce à l'équivalence de la question **4.(a)** ou directement avec l'expression des dérivées partielles que (e,e) est bien un point critique.

Ainsi (e,e) est l'unique point critique de f.

5. Comme U est un pavé ouvert et que f est de classe C^1 sur U, alors si f possède un extremum local c'est nécessairement en (e,e) car c'est le seul point critique.

Remarquons que $f(e,e) = 0$.

Notons f_1 la fonction $t \mapsto f(e+t,e)$ et f_2 la fonction $t \mapsto f(e,e+t)$.

$$\begin{aligned} f_1(t) = e^{e\ln(e+t)} - e^{(e+t)\ln(e)} &= e^{e\ln\left(e\left(1+\frac{t}{e}\right)\right)} - e^{e+t} \\ &= e^{e\left(1+\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)\right)} - e^{e+t} \\ &= e^e\left(e^{e\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)} - e^t\right) \\ &= e^e\left(e^{e\left(\frac{t}{e}-\frac{t^2}{2e^2}+\underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)} - e^t\right) \\ &= e^{e+t}\left(e^{-\frac{t^2}{2e}+\underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)} - 1\right) \\ &\underset{t\to 0}{\sim} -\frac{e^{e+t}t^2}{2e} \end{aligned}$$

En particulier, au voisinage de 0, f_1 est strictement négative (sauf en 0).
Ainsi pour tout pavé ouvert contenant (e,e), il existe $t>0$ tel que

$$f_1(t) = f(e+t,e) < 0 = f(e,e).$$

Donc f n'admet pas de minimum local en (e,e).
De même,

$$f_2(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{e^{e+t}t^2}{2e}$$

donc au voisinage de 0, f_2 est strictement positive (sauf en 0).
Ainsi pour tout pavé ouvert contenant (e,e), il existe $t>0$ tel que

$$f_2(t) = f(e,e+t) > 0 = f(e,e).$$

Donc f n'admet pas de maximum local en (e,e).
Finalement, f n'admet pas d'extremum sur U.

Exercice 3 (Agro 2017)

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher.
On pose $N = N_1 + N_2$.
On répète l'expérience suivante : on tire au hasard (uniformément) une boule dans l'urne et on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.
À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N+1$ boules et on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.
À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N+2$ boules et on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.
Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k-ième répétition de l'expérience.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note B_k l'événement « la boule tirée lors de la k-ième expérience est blanche ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

(a) D'après le cours de première année : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ». Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

— **Initialisation :** on a $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(n(2n+3-2) + 6(n+1)\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(n(2n+3) + 4n + 6\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(n(2n+3) + 2(2n+3)\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** par récurrence, on a prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) La variable X possède une variance donnée, d'après la formule de Koenig-Huygens, par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Or par le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Finalement, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right) \\ &= \frac{n+1}{2} \times \frac{4n+2-3n-3}{6} \\ &= \frac{n^2-1}{12}.\end{aligned}$$

2. On suppose dans cette question uniquement que $N_1 = N_2 = 1$.

(a) On a $X_1(\Omega) = [\![1, 2]\!]$. De plus :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(\overline{B}_1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}.$$

Donc X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$.

On a $X_2(\Omega) = [\![1, 3]\!]$. De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B}_2) + \mathbb{P}(\overline{B}_1 \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(\overline{B}_2) + \mathbb{P}(\overline{B}_1)\mathbb{P}_{\overline{B}_1}(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

et

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2) = \mathbb{P}(\overline{B}_1)\mathbb{P}_{\overline{B}_1}(\overline{B}_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Donc X_2 suit une loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$.

(b) Compléter le programme suivant prenant en entrées des entiers N_1, N_2 et k et simulant la variable aléatoire X_k :

```
1  import numpy.random as rd
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  def X(N1,N2,k):
5      Nb_blanche = N1
6      Nb_noire = N2
7      for i in range(k):
8          if rd.rand()< Nb_blanche/(Nb_blanche+Nb_noire):
9              Nb_blanche+=1
10         else :
11             Nb_noire+=1
12     return Nb_blanche
```

(c) Lorsqu'on fait un grand nombre de simulation de X_3 (ici 100 000), on constate les fréquences auxquelles les événements $[X_3 = 1]$, $[X_3 = 2]$, $[X_3 = 3]$ et $[X_3 = 4]$ se réalisent sont sensiblement égales à 0.25. On peut donc conjecture que X_3 suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété « X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ».

— **Initialisation :** c'est la question précédente.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Montrons que X_{n+1} suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n+2 \rrbracket$.
Soit $k \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = i).$$

Or entre le n et $(n+1)$ ième tirage, le nombre de boule blanche est soit le même si on tire une noire au n-ième tirage, soit augmente de 1 si n tire une blanche au n-ième tirage. Par conséquent :

$$\forall i \notin \{k-1, k\}, \quad \mathbb{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k) = 0.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = k-1) + \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = k).$$

Si $k = 1$ on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= 0 + \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Si $k \in \llbracket 2, n+2 \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = k-1) + \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** d'après le principe de récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule des probabilités totales avec le SCE

$([X_n = k])_{k\in[\![1,n+1]\!]}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1})\mathbb{P}(X_n = k)\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1})\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+2}\end{aligned}$$

car sachant $[X_n = k]$ l'urne contient k blanches pour $n+2$ boules lors du $(n+1)$-ième tirage.
Finalement

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{n+2} = \frac{1}{n+1}\times\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

3. On retourne désormais au cas général.

(a) Lors du premier tirage il y a N_1 boules blanches et $N = N_1 + N_2$ boules au total. Donc $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{N_1}{N_1+N_2}$.
Lors du deuxième tirage :

— si une boule blanche a été tirée au premier tirage, il y a N_1+1 boules blanches et $N+1$ boules au total ;

— si une boule noire a été tirée au premier tirage, il y a N_1 boules blanches et $N+1$ boules au total.

Par la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{\overline{B}_1}(B_2)\mathbb{P}(\overline{B}_1)\\ &= \frac{N_1+1}{N+1}\times\frac{N_1}{N} + \frac{N_1}{N+1}\times\frac{N-N_1}{N}\\ &= \frac{N_1}{N}.\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

i. Par définition de l'expérience aléatoire et de X_{n-1}, on a : $X_{n-1}(\Omega) = [\![N_1, N_1+n-1]\!]$ (on début avec N_1 boules blanches et à l'issue du $(n-1)$-ième tirage on en a rajouté au plus $(n-1)$).
Par la formule des probabilités totales avec le SCE $([X_{n-1}=k])_{k\in[\![N_1,N_1+n-1]\!]}$ on obtient :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}(B_n)\mathbb{P}(X_{n-1}=k).$$

Or sachant $[X_{n-1}=k]$, l'urne contient k boules blanche et $N+n-1$ boules au total donc :

$$\mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}(B_n) = \frac{k}{N+n-1}.$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n-1}\mathbb{P}(X_{n-1}=k)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k\mathbb{P}(X_{n-1}=k) = (N+n-1)\mathbb{P}(B_n).$$

ii. Soit $k \in [\![N_1, N_1+n-1]\!]$.

Sachant $B_n \cap [X_{n-1}=k]$, l'urne à l'issue du n-ième tirage contient $k+1$ boules blanches : les k qui étaient là à l'issue du $(n-1)$-ième tirage ($[X_{n-1}=k]$) et celle qu'on a rajouté à l'issue du n-ième tirage. D'où :

$$\mathbb{P}_{B_n\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1}) = \frac{k+1}{N+n}.$$

Sachant $\overline{B}_n \cap [X_{n-1}=k]$, l'urne à l'issue du n-ième tirage contient k boules blanches : les k qui étaient là à l'issue du $(n-1)$-ième tirage ($[X_{n-1}=k]$) – on n'en rajoute à l'issue du n-ième tirage car on obtient une noire au n-ième ($\overline{B}_n$). D'où :

$$\mathbb{P}_{\overline{B}_n\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1}) = \frac{k}{N+n}.$$

iii. D'après la formule des probabilités totales avec le SCE $(B_n \cap [X_{n-1}=k])_{k\in[\![N_1,N_1+n-1]\!]} \cup (\overline{B}_n \cap [X_{n-1}=k])_{k\in[\![N_1,N_1+n-1]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]\cap B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\cap B_n) \\
&\quad + \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]\cap \overline{B}_n}(B_{n+1})\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\cap \overline{B}_n) \\
&= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \left(\frac{k+1}{N+n}\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\cap B_n) + \frac{k}{N+n}\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\cap \overline{B}_n)\right).
\end{aligned}$$

Or avec les probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \mathbb{P}(B_n \cap [X_{n-1}=k])$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \frac{\mathbb{P}(B_n)}{N+n} + \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n}\left(\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\cap B_n) + P([X_{n-1}=k]\cap \overline{B}_n)\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}(B_n)}{N+n} + \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n}\left(\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}(B_n)}{N+n} + \frac{N+n-1}{N+n}\mathbb{P}(B_n).
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $(\mathbb{P}(B_n))_n$ est constante donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{N_1}{N}.$$

De plus, **3.(b)i** montre que :

$$\mathbb{E}(X_n) = (N+n)\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{N_1(N+n)}{N}.$$