Chapitre 6

Polynômes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Polynômes

Définition 6.1 (Polynôme)

On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

La liste $(a_0, \dots, a_n)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ est appelée la liste des coefficients de P.

Notation 6.1

1. Le polynôme $x \in \mathbb{K} \mapsto x$ sera noté X et plus généralement, le polynôme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sera noté $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
2. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 6.2 (Degré)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

— Si $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0$, par convention le degré de P est $-\infty$.

— Sinon, le degré de P, noté $\deg(P)$, est l'indice du plus grand coefficient non nul de P :

$$\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}.$$

Si P n'est pas égal au polynôme nul alors le coefficient $a_{\deg(P)}$ est appelé le coefficient dominant de P.

Notation 6.2

1. Si $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0$ on dit que P est le polynôme nul et on note $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré **inférieur ou égal** à n.

Proposition 6.1 (Unicité des coefficients)

— Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors P est le polynôme nul si et seulement si $\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = 0$.

— Deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont égaux si et seulement si les suites de leurs coefficients sont égales.

Preuve :

1. Prouver que si P est le polynôme nul alors : $\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = 0$.
2. Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = 0$ et supposons qu'il possède un coefficient non nul.

   On pose $d = \max\{k \mid a_k \neq 0\}$ (où les a_k désignent les coefficients).

   (a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{K}, \quad a_d x^d = -\sum_{k=0}^{d-1} a_k x^k$.

   (b) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$ on a : $x \leq \sum_{k=0}^{d-1} \frac{|a_k|}{|a_d|}$.

   (c) Aboutir à une contradiction.

□

Exemple 6.1. Trouver a, b, c tels que $X^2 + 3X - 1 = a(X-1)^2 + b(X-1) + c$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}$ et notons $P = X^2 + 3X - 1$, $Q = a(X-1)^2 + b(X-1) + c$.
Alors $P = Q$ si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.
Or

$$Q = aX^2 + (b - 2a)X + a - b + c$$

donc $P = Q$ si et seulement si

$$a = 1 \quad ; \quad b - 2a = 3 \quad ; \quad a - b + c = -1.$$

L'unique solution est donc $(a, b, c) = (1, 5, 3)$.

Proposition 6.2 (Opérations)

Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par convention pour $k \geq p+1$ on considère que $a_k = 0$ et pour $k \geq q+1$ on considère que $b_k = 0$.

1. **Somme**. La somme de P et Q, notée $P+Q$, est le polynôme définie par :
$$P+Q \ : \ x \in \mathbb{K} \ \longmapsto P(x) + Q(x).$$
Les coefficients de $P+Q$ sont $(a_k + b_k)_{k \in [\![0, \max(p,q)]\!]}$.
2. **Produit**. La somme de P et Q, notée PQ, est le polynôme définie par :
$$PQ \ : \ x \in \mathbb{K} \ \longmapsto P(x)Q(x).$$
Les coefficients de PQ sont $\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right)_{k \in [\![0, p+q]\!]}$.
3. **Multiplication par un scalaire.** Le polynôme λP est le polynôme définie par :
$$\lambda P \ : \ x \in \mathbb{K} \ \longmapsto \lambda P(x).$$
Les coefficients de λP sont $(\lambda a_k)_{k \in [\![0,p]\!]}$.
4. **Dérivée.** Le polynôme dérivée de P, noté P' est le polynôme définie par :
$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$
5. **Composée.** La composée $P \circ Q$ est le polynôme défini par : $P \circ Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k$.

Exemple 6.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Soit $P = (1+X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$.
D'après la formule du binôme de Newton :
$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad a_k = \binom{2n}{k}.$$
En particulier $a_n = \binom{2n}{n}$.
D'autre part, $P = (1+X)^n (1+X)^n$ et, encore d'après le binôme de Newton :
$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$
D'après la définition du produit et la symétrie des coefficients binomiaux :
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Proposition 6.3

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

1. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$,
2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$,
3. si $\deg(P) \geq 1$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

Exemple 6.3. Soit $P = X^2 - 2X - 1$, $Q = X^3 - 2X$ et $S = -X^2 + 3$

1. $PQ = (X^2 - 2X - 1)(X^3 - 2X) = X^5 - 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 + 2X$ est de degré $5 = 2 + 3$.
2. $P + S = -2X + 3$ est de degré $1 < \max(\deg(P), \deg(Q))$.
3. $P + Q$ est de degré $3 = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

6.2 Racine et factorisation

Définition 6.3 (Racine)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition 6.4 (Factorisation)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.
2. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des racines **distinctes** de P. Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_p)Q.$$

Lemme

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors : $a^b - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Preuve : (du lemme). Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= a\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - b\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\ &= a^n b^0 + \sum_{j=1}^{n-1} a^j b^{n-j} - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} - a^0 b^n \\ &= a^n - b^n.\end{aligned}$$

□

Preuve : (de la proposition)

1. $\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q$.
   Alors $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$.

   $\Rightarrow$ Supposons que $P(\alpha) = 0$ et notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$\begin{aligned}P = P - P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k - \alpha^k) &= a_0(1-1) + \sum_{k=1}^{n} a_k (X^k - \alpha^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k (X-\alpha) \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i X^{k-1-i} \\ &= (X-\alpha) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i X^{k-1-i}}_{=Q}\end{aligned}$$

2. $\Leftarrow$ Évident

   $\Rightarrow$ Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{P}(p)$: « pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des racines **distinctes** de P alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_p)Q$ ».

   L'initialisation est le point précédent.

   Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie.

   Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}$ des racines **distinctes** de P.

   Par le point précédent, il existe $P_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha_{p+1})P_1$.

   Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, comme $\alpha_i \neq \alpha_{p+1}$ on a :

$$0 = P(\alpha_i) = \underbrace{(\alpha_i - \alpha_{p+1})}_{\neq 0} P_1(\alpha_i)$$

   donc en particulier P_1 possède $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ comme racines distinctes. Par hypothèse de récurrence, il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P_1 = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_p)Q.$$

Mais alors

$$P = (X - \alpha_{p+1})P_1 = (X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_p)(X - \alpha_{p+1})Q.$$

□

Exemple 6.4. Factoriser $P = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$.
On commence par remarque que 1 est racine évidente donc P est factorisable par $X - 1$.

$$\begin{array}{rl|l} X^3 - 2X^2 + 2X - 1 & & X - 1 \\ \hline X^3 - X^2 & & X^2 - X + 1 \\ \hline -X^2 + 2X - 1 & & \\ -X^2 + X & & \\ \hline X - 1 & & \\ X - 1 & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

Ainsi $P = (X - 1)(X^2 - X + 1)$ et on cherche maintenant à factoriser $X^2 - X + 1$.
Il s'agit d'un polynôme de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = -3$. Les racines de $X^2 - X + 1$ sont donc :

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

En particulier :

— dans $\mathbb{R}[X]$, P se factorise en $(X - 1)(X^2 - X + 1)$;

— dans $\mathbb{C}[X]$, P se factorise en $(X - 1)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Corollaire 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme **non nul**.
Alors P possède au plus $\deg(P)$ racines distinctes.

Remarque 6.1. Attention, le nombre de racines n'est pas toujours égal à au degré et dépend en général du choix de $\mathbb{K}$ (voir l'exemple précédent).

Exemple 6.5. Déterminer les polynômes 1-périodes.
Soit P un tel polynôme ; on a : $\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x + 1) = P(x)$.
Par récurrence, on montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.
Ainsi le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines (tous les entiers naturels) donc est nul.
Ainsi P est constant..
Réciproquement les polynômes constants sont bien 1-périodiques.

Exemple 6.6. Soient $a_0, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Alors l'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad \varphi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$$

est injective.
En effet, soit P et Q tels que $\varphi(P) = \varphi(Q)$ *i.e.* $\forall i \in [\![0, n]\!]$ $P(a_i) = Q(a_i)$.
Alors $P - Q$ est de degré inférieur à $\max(\deg(P), \deg(Q)) \leq n$ et possède $n + 1$ racines distinctes (les a_i).
Donc $P - Q = 0$ et $P = Q$.

Définition 6.4 (Multiplicité d'une racine)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

— On dit que α est une **racine de P de multiplicité au moins** k s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$P = (X-\alpha)^k Q.$$

— On dit que α est **une racine de P de multiplicité** k si α est une racine de P de multiplicité au moins k mais n'est pas une racine de P de multiplicité au moins $k+1$.

— On dit que α est **une racine simple** de P si sa multiplicité vaut 1 et on dit que c'est **une racine multiple** si sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.

Remarque 6.2. Dire que α est une racine de P de multiplicité exactement $k \in \mathbb{N}^*$ signifie qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$P = (X-\alpha)Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

Proposition 6.5 (Caractérisation des racines multiples)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors
$$\alpha \quad \text{est une racine multiple de } P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = 0.$$

Preuve :

$\Rightarrow$ Soit α une racine multiple de P, il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$P = (X-\alpha)^2 Q \quad \text{d'où} \quad P' = 2(X-\alpha)Q + (X-\alpha)^2 Q'.$$
Ainsi, on a bien : $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Comme α est une racine de P, on sait qu'il existe un polynôme Q tel que
$$P = (X-\alpha)Q \quad \text{d'où} \quad P' = (X-\alpha)Q' + Q.$$
Mais alors : $0 = P'(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q'(\alpha) + Q(\alpha) = Q(\alpha)$.
Donc α est une racine de Q qui se factorise donc en $Q = (X-\alpha)R$ où R est un polynôme.
Ainsi : $P = (X-\alpha)^2 R$ et α est une racine de multiplicité au moins 2.

□

Exemple 6.7.

1. Soit $P = X^7 - 3X^5 + 2X^4 - X^3 = X^3(X^4 - 3X^2 + 2X - 1)$ donc 0 est racine de multiplicité 3.
2. Soit $Q = X^5 - 2X^4 + X^3 + 2X^2 - 4X + 2$ possède 1 comme racine évident.
   En procédant par division euclidienne ou par identification :
   $$Q = (X-1)(X^4 - X^3 + 2X - 2)$$
   et 1 est encore racine évidente de $X^4 - X^3 + 2X - 2$ d'où
   $$Q = (X-1)^2(X^3 + 2).$$
   Comme 1 n'est pas racine de $X^3 + 2$ ce polynôme n'est pas factorisable par $X - 1$ et on en déduit que 1 est racine de multiplicité 2 de Q.

Remarque 6.3. Plus généralement, on a la caractérisation hors-programme suivante :

$$\alpha \text{ est racine de multiplicité } k \in \mathbb{N}^* \text{ de } P \iff \forall i \in [\![0, k-1]\!] \ P^{(i)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

La preuve est laissée en exercice (difficile).

Théorème 6.1 (D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ **non constant** possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Preuve : Admis. □

Corollaire 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ **toutes** les racines complexes distinctes de P et $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.
Alors :

$$P = a \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où a est le coefficient dominant de P.

Proposition 6.6

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors

$$P(\alpha) = 0 \iff P(\overline{\alpha}) = 0.$$

Remarque 6.4. Pour factoriser « au maximum » un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ on commence par le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis on regroupe les paires de racines conjuguées pour obtenir un produit de facteurs :

- de degré 1 (qui correspondent aux racines réelles) ;
- de degré 2 à discriminant strictement négatifs de la forme $X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$ qui correspondent aux regroupement de racines complexes conjuguées $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$.

Exemple 6.8. Factorisons $P = X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 2X + 15$.

- On cherche les racines évidentes : ici ± 1. Cela permet de factoriser par $(X-1)(X+1)$. Par division euclidienne ou par identification, on trouve :

$$P = (X-1)(X+1)(X^2 - 2X - 15).$$

- On factorise $X^2 - 2X - 15$: il s'agit d'un polynôme de degré 2. En calculant le discriminant, on trouve que les racines sont -3 et 5.
- Finalement $P = (X-1)(X+1)(X-5)(X+3)$. Il n'y a pas de facteurs de degré 2 car P a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6.9. Factorisons $P = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ où $\theta \in]0, \pi[$.

— Dans $\mathbb{C}$: $P = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$.

— Dans $\mathbb{R}$: en regroupant les paires de racines complexes conjuguées, $P = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ (on ne peut pas faire mieux).

Exemple 6.10. Factorisons $X^4 + 1$.

— On cherche les racines complexes : soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 \iff z^4 = -1 &\iff r^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} r^4 & = & 1 \\ 4\theta & = & \pi \bmod(2\pi) \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} r & = & 1 \\ \theta & = & \dfrac{\pi}{4} \bmod\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{array} \right. \\ &\iff z \in \{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{-i\frac{3\pi}{4}}\}. \end{aligned}$$

Ainsi dans $\mathbb{C}$: $X^4 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X - e^{i\frac{3\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{3\pi}{4}})$.

— Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}$ on regroupe les paires de racines conjuguées :

$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= (X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X - e^{i\frac{3\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{3\pi}{4}}) \\ &= \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1\right) \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1). \end{aligned}$$