Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2026-2027

BCPST2 – Mathématiques

DM2 – À rendre à la rentrée

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

1 Loi de Poisson

Lois de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :
  - **i)** $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
  - **ii)** $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors X possède une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

1. Apprendre cet encadré par cœur (c'est la fin du chapitre 5).

2. Il est clair que $\forall k \in \mathbb{N}, e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \geq 0$.

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ est une série exponentielle donc elle converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

3. Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

(a) Montrons que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument.

Pour tout $k \geq 1$ on a :

$$k\mathbb{P}(X = k) = \lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Il s'agit du terme général d'une série exponentielle donc absolument convergente (les termes sont positifs). Ainsi X possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = 0 + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

(b) Montrons que X possède un moment d'ordre 2, c'est-à-dire, montrons que $\sum_{k\geq 0} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument.
Pour tout $k \geq 2$:

$$k^2\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}(k(k-1)+k)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Il s'agit d'une combinaison linéaire de séries exponentielle donc elle converge absolument (les termes sont positifs). Ainsi X possède un moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 0 + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!} + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\\ &= \lambda + \lambda^2\end{aligned}$$

En particulier, X possède une variance et par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

2 Exercices

Exercice 9

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue une infinité de tirages avec remise.

1. Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche.

(a) La variable X_1 donne le rang du premier succès lors d'une répétition d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes (tirages avec remise) dont le succès « obtenir une boule blanche » a probabilité

$$\frac{a}{a+b}.$$

Donc X_1 suit la loi $\mathcal{G}\left(\frac{a}{a+b}\right)$.

(b) On en déduit :

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{a+b}{a} \quad ; \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{\frac{b}{a+b}}{\left(\frac{a}{a+b}\right)^2} = \frac{b(a+b)}{a^2}.$$

2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la deuxième boule blanche.

(a) On a $X_2(\Omega) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$. Soit $n \geq 2$. On note B_i l'événement « obtenir une blanche lors du i-ème tirage » et N_i l'événement « obtenir une noire lors du i-ème tirage ». On a alors :

$$[X_2 = n] = \bigcup_{k=1}^{n-1}\left(B_n \cap B_k \cap \bigcap_{j=1, j\neq k}^{n-1} N_j\right)$$

(l'indice k représente le tirage de la première blanche). Or, pour tout $k, j \in [\![1, n-1]\!]$ avec $j \neq k$, on a par indépendance des tirages :

$$\mathbb{P}(B_n \cap B_k \cap \bigcap_{j=1, j\neq k}^{n-1} N_j) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2}.$$

Donc, par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(X_2 = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_n \cap B_k \cap \bigcap_{j=1, j\neq k}^{n-1} N_j) = (n-1)\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2}.$$

(b) La variable X_2 possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 2} n\mathbb{P}(X_2 = n)$ est absolument convergente. D'après la question précédente, il s'agit d'un multiple de la série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $0 < \dfrac{b}{a+b} < 1$. Elle est donc absolument convergente.
Par conséquent, X_2 possède une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}(X_2 = n) &= \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \frac{2}{\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^3} \\ &= \frac{2(a+b)}{a}.\end{aligned}$$

Exercice 11

1. Par linéarité, Y possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = n - \mathbb{E}(X) = n - np = n(1-p).$$

2. D'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} 2^n \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2^n \mathbb{P}(X = n) = 2^n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \frac{(2\lambda)^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} 2^n \mathbb{P}(X = n)$ est donc une série exponentielle absolument convergente.
La variable aléatoire Y possède donc une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\lambda)^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{\lambda}.$$

3. D'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} 2^n \mathbb{P}(X=n)$ converge absolument.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2^n \mathbb{P}(X=n) = 2^n p(1-p)^{n-1} = 2p(2-2p)^{n-1}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} 2^n \mathbb{P}(X=n)$ est donc une série géométrique de raison $2-2p>0$ qui converge absolument si et seulement si

$$2-2p<1 \iff p>\frac{1}{2}.$$

Ainsi la variable aléatoire Y possède une espérance si et seulement si $\frac{1}{2}<p<1$ et dans ce cas elle est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2p(2-2p)^{n-1} = \frac{2p}{1-(2-2p)} = \frac{2p}{2p-1}.$$

4. D'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)} \mathbb{P}(X=n)$ converge absolument.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n+1)!}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}(X=n)$ est donc une série exponentielle absolument convergente.
La variable aléatoire Y possède donc une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n+1)!} &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1 \right) \\
&= \frac{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)}{\lambda}.
\end{aligned}$$

3 Problème (d'après un oral d'agro)

Soit $x \in [\![2,9]\!]$ et $y \in [\![1,10]\!]$.
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune 10 tickets.
Parmi les 10 tickets de U_1, x portent la lettre « G ».
Parmi les 10 tickets de U_2, y portent la lettre « G ».
Deux joueurs J_1 et J_2 s'affrontent de la manière suivante :

— Le joueur J_1 commence et pioche simultanément deux tickets dans l'urne U_1. S'il tire deux tickets « G », il gagne et le jeu s'arrête.

— Si le joueur J_1 n'a pas gagné au tour précédent, le joueur J_2 tire un ticket dans l'urne U_2. S'il tire un ticket « G », il gagne et le jeu s'arrête.

Le jeu continue ainsi jusqu'à ce qu'un des deux joueurs gagne et mette fin à la partie.
Après chaque tour, les tickets sont remis dans les urnes.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit les événements :

— A_k : « le k-ième tirage de J_1 a lieu et J_1 tire deux tickets G » ;

— B_k : « le k-ième tirage de J_2 a lieu et J_2 tire un ticket G » ;

— E_k : « J_1 gagne à son k-ième tirage » ;

— F_k : « J_2 gagne à son k-ième tirage » ;

— E : « J_1 gagne » ;

— F : « J_2 gagne ».

1. Pour que J_1 gagne au premier tour, il faut qu'il pioche 2 tickets parmi les x gagnants. Comme il y a $\binom{10}{2}$ tirages possibles alors :

$$p_1 = \frac{\binom{x}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{x(x-1)}{90}.$$

Sachant que J_1 a perdu au premier tour, pour que J_2 gagne a son premier tour il doit tirer un ticket gagnant donc

$$p_2 = \frac{y}{10}.$$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On a $E_k = A_k$ mais il sera plus pratique pour la suite d'exprimer E_k à l'aide d'événements qui concernent tous les tirages précédents le k-ième :

$$E_k = \overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap \overline{B_{k-1}} \cap A_k$$

car J_1 gagne lors de son k-ième tirage si et seulement J_1 et J_2 ont perdus lors des tirages $1, \dots, k-1$ et J_1 tire deux tickets gagnants lors de son k-ième tirage.
D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(E_k) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{B_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}}(\overline{B_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap \overline{B_{k-1}}}(A_k).$$

Or à chacun de leur tour, la probabilité que J_i $(i = 1, 2)$ gagne sachant que personne n'a gagné aux tours précédents est p_i $(i = 1, 2)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_k) &= \underbrace{(1-p_1)(1-p_2)\times\cdots\times(1-p_1)(1-p_2)}_{k-1\text{fois}}p_1\\ &= p_1(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}.\end{aligned}$$

(b) On a $E=\bigcup_{k\geq 1}E_k$ et comme les événements E_k sont deux à deux incompatibles alors par σ-additivité, la série $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(E_k)$ converge et sa somme est $\mathbb{P}(E)$.

Ainsi :

$$\mathbb{P}(E)=\sum_{k=1}^{+\infty}p_1(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}=\frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

car on retrouve la somme d'une série géométrique de raison $(1-p_1)(1-p_2)$ après avoir fait le changement d'indice $i=k-1$.

(c) De même $F_k=\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}\cap\overline{B_{k-1}}\cap\overline{A_k}\cap B_k$ donc avec la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(F_k)=(1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2.$$

Or $F=\bigcup_{k\geq 1}F_k$ et comme les événements F_k sont deux à deux incompatibles alors par σ-additivité, la série $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(F_k)$ converge et sa somme est $\mathbb{P}(F)$.

Ainsi :

$$\mathbb{P}(E)=\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2=\frac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.$$

(d) La partie se finie si et seulement l'un des deux joueurs gagne c'est-à-dire si et seulement si l'événement $E\cup F$ est réalisé.

Or F et E étant incompatibles :

$$\mathbb{P}(E\cup F)=\mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)=\frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}+\frac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}=1.$$

Ainsi la partie se finie presque sûrement.

3. On dit que le jeu est équitable lorsque les deux joueurs ont la même probabilité de gagner.

(a) Le jeu est équitable si et seulement si $\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(F)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(F) &\iff \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}=\frac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}\\ &\iff p_1=p_2(1-p_1)\\ &\iff \frac{p_1}{1-p_1}=p_2\\ &\iff \frac{x(x-1)}{90-x(x-1)}=\frac{y}{10}\\ &\iff \frac{10x(x-1)}{90-x^2+x}=y.\end{aligned}$$

(b) Écrire un fonction Python qui prend en entrée une liste de réels de $[0,9]$ et qui renvoie la liste des images de ces réels par la fonction f.

```
def f(x):
        return 10*x*(x-1)/(90-x**2+x)

def image(X):
        return [f(x) for x in X]
```

(c) Avec la fonction ci-dessus, déterminer tous les couples (x,y) tels que le jeu est équitable.

```
X = range(2,10)
FX=image(X)
Y = range(1,11)
for k in range(len(FX)):
        for y in Y:
                if y == FX[k]:
                        print(X[k],y)
```

On obtient un unique couple : $x=6$ et $y=5$.