Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – Révisions 1

Suites

1 Limites et équivalents de suites

Exercice 1. Déterminer, si elle existe, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de :

1. $n^5 - 3n^2 + 12$;
2. $\dfrac{n^3 - n^2 + 1}{3n^2 + 5n - 2}$;
3. $\dfrac{\sin(n)}{n}$.
4. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$;
5. $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$;
6. $(2 + e^{-n}) \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \sqrt{n^2+1}$;
7. $e^n(1 - \cos(ne^{-n}))$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

1. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite.
2. En déduire la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante convergeant vers une limite finie ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.
2. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}.$$
3. En déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

2 Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique

Exercice 6. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{array} \right. .$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = u_n + v_n$.
   Montrer que (p_n) est une suite géométrique et en déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$.
   Montrer que (z_n) est une suite arithmétique et en déduire l'expression de z_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 7. Soit (v_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 2v_n - 3n + 2 \quad \text{et} \quad v_0 = -1.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Montrer que (u_n) est arithmético-géométrique.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
2. En calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ déterminer l'expression de v_n en fonction n.

3 Suites récurrentes

Exercice 8. Soit u la suite réelle vérifiant

$$u_0 = 4, u_1 = 7\,, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 4.$$

1. Trouver une (suite) constante a solution.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - a$.
   (a) Montrer que v est récurrente linéaire d'ordre 2.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 9. Soit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $0 < u_0, u_1 < 1$ et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n.$$

1. Donner le terme général de (u_n) puis montrer que la suite converge vers un certain réel $\ell \in [0, 1]$.

2. Soit une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $0 < v_0, v_1 < 1$ et pour tout $n \geq 0$,
$$v_{n+2} = \frac{2}{3}v_{n+1}^2 + \frac{1}{3}v_n^2.$$
On pose $a = \max(v_0, v_1)$.
   (a) Montrer que pour $n \geq 0$, $v_n \leq a$.
   (b) Montrer que pour $n \geq 0 : 0 < v_{2n+1} \leq a^{n+1}$ et $0 < v_{2n} \leq a^{n+1}$.
   (c) Étudier la convergence de (v_n) ?

Exercice 10. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x}$$
et on définie une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence suivante :
$$\begin{cases} u_0 & = & e \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \varphi(u_n) + u_n \end{cases}.$$

1. Dresser le tableau de variations de φ en faisant apparaître les limites en 0 et $+\infty$.
2. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\varphi(\alpha) = 0$.
   Justifier que $\alpha \in [1; e]$
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > \alpha$.
4. Si cette suite est convergente de limite finie L, que peut valoir L ?
5. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
6. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 (Suite récurrente et fonction décroissante)**.** Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$
On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[1, 3]$ et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 3]$.
3. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Soit g la fonction définie sur $[1, 3]$ par
   $$\forall x \in [1, 3],\ g(x) = f \circ f(x).$$
   Déterminer l'expression de g et en déduire ses variations.
   (b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = g(v_n)$ et en déduire ses variations.
   (c) De même, déterminer les variations de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
4. Conclure quant à la convergence de (u_n) .

4 Divers

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = xe^{-x}$.

1. Étudier les variations de f et déterminer sa limite en $+\infty$.
2. Soit $n \geq 3$. Justifier que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède deux solutions. On notera u_n et v_n ces solutions avec $u_n < v_n$.
3. Justifier que pour tout $n \geq 3$ on a $u_n \in [0,1]$ et $v_n \in [1, +\infty[$.
4. Étudier la monotonie de des suites $(u_n)_{n\geq 3}$ et $(v_n)_{n\geq 3}$.
5. Déterminer la limite de chacune des deux suites.
6. (a) En déduire un équivalent de (u_n).
   (b) Justifier que : $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 13. On considère une suite réelle u vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

1. En posant $X = \left(\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{N}}$, déterminer une récurrence géométrique satisfaite par X, de raison matricielle A.
2. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, vérifier que la matrice P est inversible et que $P^{-1}.A.P$ est diagonale.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \lambda + \mu \cdot 2^n + \nu \cdot 3^n$$

pour trois constantes $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ déterminables en fonctions de u_0, u_1, u_2.