Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – Révisions 1

Suites

1 Limites

Correction de l'exercice 1.

1. La suite est polynomiale en n donc :
$$n^5 - 3n^2 + 12 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^5.$$
Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^5 - 3n^2 + 12) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$.
2. Par opération sur les équivalents :
$$\frac{n^3 - n^2 + 1}{3n^2 + 5n - 2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3n^2} = \frac{n}{3}.$$
Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 - n^2 + 1}{3n^2 + 5n - 2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3} = +\infty$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$0 \leq \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ on en déduit par encadrement que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{n+1-(n+2)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$
Or on sait que :
$$n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{-1}{n} = -1.$$
Par conséquent, la continuité de la fonction exponentielle en -1 donne :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{-1}.$$

6. Par équivalent usuel : $\sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

   On en déduit :

$$(2+e^{-n})\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\times\frac{1}{n}\times\sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\times\frac{1}{n}\times n = 2.$$

   Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty}(2+e^{-n})\sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\sqrt{n^2+1} = 2$.

7. Par équivalent usuel : $1-\cos(ne^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2e^{-2n}}{2}$. Ainsi :

$$e^n(1-\cos(ne^{-n})) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2e^{-n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Correction de l'exercice 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \\
&= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

   et d'autre part de même

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} \\
&= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Cela montre que (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.
Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n - v_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = -\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. En particulier, elles convergent vers la même limite ℓ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \ell \leq u_n.$$

On en déduit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell + 2\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \ell + 2\sqrt{n+1}$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\ell}{2\sqrt{n}} + 1 \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} \leq \frac{\ell}{2\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Or on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ell}{2\sqrt{n}} + 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ell}{2\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = 1$$

donc par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} = 1 \quad i.e \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Correction de l'exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

1. On va montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes ; un résultat du cours permet alors de conclure qu'elles convergent vers une même limite.

   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
u_{2(n+1)} - u_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} \\
&= \frac{1}{2n+3} + \frac{-1}{2n+2} \\
&< 0
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+4} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} \\
&= \frac{-1}{2n+4} + \frac{1}{2n+3} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Cela montre que (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_{2n} - u_{2n+1} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Les suites sont donc bien adjacentes.

2. Comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite.

Correction de l'exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante convergeant vers une limite finie ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \\
&= \frac{nu_1 + \cdots + nu_n + nu_{n+1} - (n+1)u_1 - \cdots - (n+1)u_n}{n(n+1)} \\
&= \frac{nu_{n+1} - u_1 - \cdots - u_n}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad u_{n+1} \geq u_k.$$

Ainsi

$$nu_{n+1} \geq u_1 + \cdots + u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n \geq 0.$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Par ailleurs, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente donc majorée. En notant M un majorant, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \leq \frac{M + \cdots + M}{n} = M.$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc elle converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{2n} = \frac{u_1 + \cdots + u_{2n}}{2n} &= \frac{u_1 + \cdots + u_n + \cdots + u_{2n}}{2n} \\ &= \frac{v_n}{2} + \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{2n} \\ &\geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n + \cdots + u_n}{2n} \quad \text{par croissance de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \\ &\geq \frac{v_n}{2} + \frac{nu_n}{2n} \\ &\geq \frac{u_n + v_n}{2}. \end{aligned}$$

3. Soit ℓ' la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En passant à la limite dans la relation précédente on a :

$$\ell' \geq \frac{\ell + \ell'}{2} \quad i.e \quad \ell' \geq \ell.$$

D'autre part, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \leq \frac{u_n + \cdots + u_n}{n} = u_n.$$

D'où en passant à la limite :

$$\ell' \leq \ell.$$

Finalement $\ell = \ell'$.

Correction de l'exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

Cela montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. On a pour tout entier $n > 1$: $n(n-1) \leq n^2$. Donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}.$$

Pour tout $n \geq 1$ on en déduit :

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &\leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \quad \text{par télescopage.} \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, (u_n) est majorée (par 2). Elle est de plus croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

2 Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique

Correction de l'exercice 6.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$p_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_n - v_n + u_n + 4v_n = 3(u_n + v_n) = 3p_n.$$

La suite (p_n) est donc géométrique de raison 3. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = p_0 3^n = 3^n.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_n + 4v_n = u_n + v_n + 3v_n = p_n + 3v_n = 3v_n + 3^n.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$z_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{3v_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{v_n}{3^n} + \frac{1}{3} = z_n + \frac{1}{3}.$$

Ainsi (z_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = z_0 + \frac{n}{3} = -1 + \frac{n}{3}.$$

4. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 3^n z_n = -3^n + 3^{n-1}n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = p_n - v_n = 2 \cdot 3^n - 3^{n-1}n.$$

Correction de l'exercice 7.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = v_{n+2} - v_{n+1} &= 2v_{n+1} - 3(n+1) + 2 - (2v_n - 3n + 2) \\ &= 2(v_{n+1} - v_n) - 3 \\ &= 2u_n - 3 \end{aligned}$$

   Ainsi (u_n) est arithmético-géométrique.

   (b) On cherche le point fixe de la fonction associée c'est-à-dire la solution de :

$$x = 2x - 3 \iff x = 3.$$

   Soit $(w_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n - 3$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2(w_n + 3) - 6 = 2w_n.$$

   La suite $(w_n)_n$ est donc géométrique de raison 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = w_n + 3 = 2^n w_0 + 3 = 2^n(u_0 - 3) + 3 = -2^{n+1} + 3.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'une part :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0 = v_n + 1.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1}(-2^{k+1} + 3)\\ &= 2 - 2^{n+1} + 3n.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 - 2^{n+1} + 3n.$$

3 Suites récurrentes

Correction de l'exercice 8. Soit u la suite réelle vérifiant

$$u_0 = 4, u_1 = 7\,, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 4.$$

1. Une (suite) constante a est solution ssi

$$a = 5a - 6a + 4 \Longleftrightarrow a = 2.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 2$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}v_{n+2} = u_{n+2} - 2 = 5u_{n+1} - 6u_n + 4 - 2 &= 5(v_{n+1} + 2) - 6(v_n + 2) + 2\\ &= 5v_{n+1} - 6v_n.\end{aligned}$$

   Ainsi v est récurrente linéaire d'ordre 2.

   (b) L'équation caractéristique est : $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   Son discriminant Δ est : $\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$. On en déduit que l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{5+1}{2} = 3.$$

   Il existe donc deux constantes C et D telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = C \cdot 2^n + D \cdot 3^n.$$

   Pour déterminer C et D on utiliser $v_0 = 2$ et $v_1 = 5$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 &=& C + D \\ 5 &=& 2C + 3D \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2 &=& C + D \\ 1 &=& D \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} C &=& 1 \\ D &=& 1 \end{array}\right.$$

   Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2^n + 3^n.$$

3. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n + 2$.

Correction de l'exercice 9.

1. La suite (u_n) est solution d'une récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est
$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \quad i.e \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$
et dont les racines sont $r_1 = \dfrac{2+4}{6} = 1$ et $r_2 = \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3}$.
Il existe donc deux constantes réelles C et D telles que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C + D(-3)^{-n}.$$
La suite (u_n) converge donc vers $\ell = C$. Déterminons C, D en fonction de u_0 et u_1. On a
$$C + D = u_0 \quad \text{et} \quad C - \frac{1}{3}D = u_1$$
et donc
$$D = \frac{3}{4}(u_0 - u_1) \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{4}u_0 + \frac{3}{4}u_1$$
Comme $0 < u_0, u_1 < 1$, alors $0 < C = \ell < 1$.
2. On remarque que $a < 1$. Montrons, par récurrence sur n que, $0 \leq v_n, v_{n+1} \leq a$.
   — Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ par définition de a (on a égalité)
   — Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n, v_{n+1} \leq a$ alors
   (a) $0 \leq v_{n+1} \leq a$ et
   (b) $0 \leq v_n^2, v_{n+1}^2 \leq a^2 \leq a$, car $a \leq 1$. On a donc
   $$v_{n+2} = \frac{2}{3}v_{n+1}^2 + \frac{1}{3}v_n^2 \leq \frac{2}{3}.a + \frac{1}{3}.a \leq a$$
   et
   $$v_{n+2} = \frac{2}{3}v_{n+1}^2 + \frac{1}{3}v_n^2 \geq 0$$
   L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée pour $n+1$ et
   — par le principe de récurrence,
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n, v_{n+1} \leq a$$
   ce qui implique l'énoncé demandé.
3. Montrons que par récurrence, pour tout $n \geq 0$, $0 < v_{2n+1} \leq a^{n+1}$ et $0 < v_{2n} \leq a^{n+1}$.
   — Pour $n = 0$, c'est vrai par définition de a.
   — Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_{2n}, v_{2n+1} \leq a^{n+1}$ alors
   (a) En se servant du fait que $a \leq 1$ et donc que $a^{2n} \leq a^n$,
   $$v_{2n+2} = \frac{2}{3}v_{2n+1}^2 + \frac{1}{3}v_{2n}^2 \leq \frac{2}{3}.a^{2(n+1)} + \frac{1}{3}.a^{2(n+1)} = a^{2(n+1)} \leq a^{n+2}$$
   (b) de même
   $$v_{2n+3} = \frac{2}{3}v_{2n+2}^2 + \frac{1}{3}v_{2n+1}^2 \leq \frac{2}{3}.a^{2(n+2)} + \frac{1}{3}.a^{2(n+1)} \leq a^{2(n+1)} \leq a^{n+2}$$

(c) enfin, il est clair que, en tant que somme de carré de nombres > 0, $0 < v_{2n+2}$ et $0 < v_{2n+3}$.

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée pour $n+1$ et

— par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < v_{2n+1}, v_{2n} \leq a^{n+1}$$

4. Par le théorème des gendarmes et le fait que $0 \leq a < 1$, les suites extraites (v_{2n}) et v_{2n+1} tendent vers 0. Il en est de même de la suite complète (v_n).

Correction de l'exercice 10.

1. D'après les théorèmes sur les opérations sur les fonctions dérivables, la fonctions φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = \frac{\left(x \times \frac{1}{x} + \ln(x)\right) \times x - (x\ln(x) - 1)}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0.$$

Ainsi, φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Par croissance comparée on sait que : $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$. Donc par opérations sur les limites, on obtient :

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty.$$

- On a

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(x) - \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Ainsi :

x	0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	‖	$+$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ (et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante). En particulier, comme $0 \in \varphi(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$, il possède un unique antécédent par φ. Ainsi, l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique solution, notée α.
Par ailleurs,

$$\varphi(1) = -1 < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(e) = \frac{e-1}{e}.$$

Par croissance stricte de φ^{-1}, on a donc

$$1 < \alpha < e$$

et a fortiori $\alpha \in [1, e]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « u_n est bien défini et $u_n > \alpha$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 = e$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après ce qui précède.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

     Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et strictement supérieur à α. En particulier u_n appartient à l'ensemble de définition de φ. Par conséquent, $u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n$ est bien défini. De plus, on a, par hypothèse de récurrence et croissance stricte de φ :

     $$u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n > \varphi(\alpha) + \alpha = \alpha.$$

     Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est bien défini et } u_n > \alpha.$$

4. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve :

   $$L \geq \alpha > 0.$$

   Or, $x \mapsto \varphi(x)+x$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc L est un point fixe de $x \mapsto \varphi(x)+x$.
   Soit $x > 0$.

   $$\varphi(x) + x = x \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \alpha.$$

   Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L nécessairement $L = \alpha$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

   $$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) + u_n - u_n = \varphi(u_n).$$

   Or, $u_n > \alpha$ donc par croissance de φ on a :

   $$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) > \varphi(\alpha) = 0.$$

   Donc $u_{n+1} > u_n$.
   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
   La suite est donc croissante.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

   Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L. Alors, d'après la question 4, $L = \alpha$. Or, par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout entier naturel n on a :

   $$u_0 \leq u_n.$$

   Par passage à la limite on obtient :

   $$u_0 \leq \alpha.$$

   Cela contredit la question 3.

   Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 11 (Suite récurrente et fonction décroissante)**.** Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. La fonction f est dérivable sur $[1,3]$ et :

$$\forall x \in [1,3], \quad f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0.$$

   Donc f est strictement décroissante et $f([1,3]) = [f(3), f(1)] = \left[\frac{5}{3}, 3\right] \subset [1,3]$.

2. Par récurrence.
   - **Initialisation :** $u_0 = 1 \in [1,3]$.
   - **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $u_n \in [1,3]$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f([1,3]) \subset [1,3]$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,3]$.

3. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

   (a) On a

$$\forall x \in [1,3],\ g(x) = f \circ f(x) = 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 1 + \frac{2x}{x+2}.$$

   La fonction g est dérivable et :

$$\forall x \in [1,3],\ g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0.$$

   Ainsi g est strictement croissante sur $[1,3]$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v_{n+1} = u_{2(n+1)} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}) = f(f(v_n) = g(v_n).$$

   Par récurrence on montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone
   - **Initialisation :** $v_0 = u_0 = 1$ et $v_1 = u_2 = g(u_0) = \frac{5}{3} > v_0$.
   - **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $v_n \le v_{n+1}$. Alors par croissance de g :

$$v_{n+2} = g(v_{n+1}) \ge g(v_n) = v_{n+1}.$$

   - **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \le v_{n+1}$ *i.e* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1}) = f(f(w_n) = g(w_n).$$

   Par récurrence on montre que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone
   - **Initialisation :** $w_0 = u_1 = 3$ et $w_1 = u_3 = g(u_1) \le 3$.
   - **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $w_n \ge w_{n+1}$. Alors par croissance de g :

$$w_{n+2} = g(w_{n+1}) \le g(w_n) = w_{n+1}.$$

— **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq w_{n+1}$ *i.e* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante .

(d) D'après la question 2 et la question précédente les suites (v_n) et (w_n) sont monotones et bornées donc elles convergent vers des réels ℓ et ℓ' dans $[1,3]$. De plus, en passant à la limite de la relation de récurrence, par continuité de g on a :
$$\ell = g(\ell) \quad \text{et} \quad \ell' = g(\ell').$$
Déterminons les points fixes de g :
$$g(x)x = \iff \frac{2x}{x+2} + 1 = x \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -1.$$
Le seul point fixe dans $[1,3]$ est 2 donc $\ell = \ell' = 2$.

4. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 2 donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2

4 Divers

Correction de l'exercice 12.

1. La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = (1-x)e^{-x}.$$
Par ailleurs, par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. Soit $n \geq 3$.
La fonction f est strictement croissante et continue sur $[0,1]$ donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[) = [0,e^{-1}[$. Or
$$n \geq 3 > e^{-1}.$$
Donc : $\dfrac{1}{n} \in f([0,1[)$.
Par conséquent, $\dfrac{1}{n}$ possède un unique antécédent par f sur $[0,1[$ c'est-à-dire que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[0,1[$. On la note u_n.
De même, f est strictement décroissante et continue sur $[1,+\infty[$ donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) =]0,e^{-1}[$. Or
$$n \geq 3 > e^{-1}.$$
Donc : $\dfrac{1}{n} \in f([1,+\infty[)$.

Par conséquent, $\dfrac{1}{n}$ possède un unique antécédent par f sur $[1,+\infty[$ c'est-à-dire que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1,+\infty[$. On la note v_n.

Finalement, l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ possède bien deux solutions sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $u_n<1\leq v_n$.

3. Dans la question précédente on a montré que

$$\forall n\geq 3,\quad u_n\in[0,1]\quad \text{et}\quad v_n\in[1,+\infty[.$$

4. Par définition, de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ on a :

$$\forall n\geq 3,\quad f(u_n)=\frac{1}{n}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a donc

$$f(u_n)=\frac{1}{n}>f(u_{n+1})=\frac{1}{n+1}.$$

Supposons par l'absurde que $u_n\leq u_{n+1}$. Comme f est croissante sur $[0,1]$ et que u_n et u_{n+1} sont dans $[0,1]$ alors on en déduit :

$$f(u_n)\leq f(u_{n+1}).$$

Contradiction. Ainsi : $u_n>u_{n+1}$.
Donc : $\forall n\geq 3$, $u_n>u_{n+1}$.
La suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est donc strictement décroissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$. De même supposons par l'absurde que $v_n\geq v_{n+1}$. Comme f est décroissante sur $[1,+\infty[$ et que v_n et v_{n+1} sont dans $[1,+\infty[$ alors on en déduit :

$$\frac{1}{n}=f(v_n)\leq f(v_{n+1})=\frac{1}{n+1}.$$

Contradiction. Ainsi : $v_n<v_{n+1}$.
Donc : $\forall n\geq 3$, $v_n<v_{n+1}$.
La suite $(v_n)_{n\geq 3}$ est donc strictement croissante. [1]

5. D'après les questions 3 et 4, la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et minorée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite ℓ.

De plus, on sait que pour tout entier supérieur ou égal à 3, on a : $f(u_n)=\dfrac{1}{n}$.

En passant à la limite dans cette égalité, compte tenu de la continuité de f, ℓ vérifie donc

$$\ell e^{\ell}=\lim_{n\to}f(u_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Ainsi $\ell=0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

D'après la question 4, la suite $(v_n)_{n\geq 3}$ est croissante. Par le théorème de la limite monotone, soit elle converge vers une limite ℓ soit elle diverge vers $+\infty$.

1. On aurait aussi pu utiliser la bijection réciproque de f sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ respectivement.

Supposons qu'elle converge vers une limite finie ℓ. On sait que pour tout entier supérieur ou égal à 3, on a : $f(v_n) = \frac{1}{n}$.
En passant à la limite dans cette égalité, compte tenu de la continuité de f, ℓ vérifie donc

$$\ell e^{\ell} = \lim_{n\to} f(v_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ainsi $\ell = 0$.
Mais : $\forall n \geq 3$, $v_n \geq 1$.
Donc par passage à la limite $\ell \geq 1$. Contradiction.
Ainsi $(v_n)_{n\geq 3}$ diverge vers $+\infty$: $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

6. Par la question précédente : $\lim_{n\to+\infty} e^{-u_n} = 1$ donc on a :

$$\frac{1}{n} = u_n e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$

7. On sait par la question précédente que $u_n = \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc :

$$u_n - \frac{1}{n} = \frac{e^{u_n}}{n} - \frac{1}{n} = \frac{e^{\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{n} = \frac{\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = frac1n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Correction de l'exercice 13. On considère une suite réelle u vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

1. En posant $X = \left(\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{N}}$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = AX_n$$

où on a posé $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. On inverse P par un pivot de Gauss et on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: D.$$

3. Par la récurrence géométrique et le calcul de puissance de matrices par changement de base, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, X_n = PD^n P^{-1} X_0$$

En développant les produits, on voit que u_n, la première composante de X_n s'écrit

$$u_n = \lambda + \mu \cdot 2^n + \nu \cdot 3^n$$

pour trois constantes $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ déterminables en fonctions de u_0, u_1, u_2 (et des coefficients de P et P^{-1}, ce qui est important, c'est la dépendance en n, pas les expressions exactes de ces coefficients).