Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DM0

- ⋆ **À rendre le jour de la rentrée au début de la séance de cours. Aucun délai supplémentaire ne sera accordé.**
- ⋆ **Le devoir doit être rédigé sur des copies doubles. Les résultats doivent être mis en valeur (encadrés ou soulignés par exemple).**

1 Échauffements

Exercice 1.

1. *Mettre chacune des expressions suivantes sous la sous la forme* $a \times q^n$.

   (a) $\dfrac{2^{n-1}}{3^{3n}} \times \dfrac{1}{5^{n+1}}$, (b) $\dfrac{-2^n}{7^n} \times \dfrac{(-3)^n}{5^{2n+1}}$, (c) $\dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{1}{8^n}$, (d) $\dfrac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}}$.

2. *Factoriser les expressions suivantes le plus possible.*

   (a) $2x + x^2$,
   (b) $e^x + e^{2x}$,
   (c) $1 - x^2$,
   (d) $(1-2p)^{n-1} - 2n(1-p)^n$,
   (e) $1 - q^3$.

Exercice 2.

1. *Résoudre les équations suivantes :*

   (a) $2x + 7 = -5x$, (b) $x + 1 = x - 3$.

2. *Résoudre les équations suivantes :*

   (a) $2e^x + 7 = -5e^x$, (b) $e^x + 1 = e^x - 3$.

3. *Résoudre les équations suivantes :*

   (a) $2\ln(x) + 7 = -5\ln(x)$, (b) $\ln(x) + 1 = \ln(x) - 3$.

Exercice 3. *Calculer les sommes suivantes.*

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{10}(2k-3)$;
2. $\dfrac{1}{2^{10}} + \dfrac{1}{2^{20}} + \dfrac{1}{2^{30}} + \cdots + + \dfrac{1}{2^{1000}}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=3}^{11}(n^2 - 3n + 4)$;
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$;
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

2 Analyse

2.1 Fonctions

Exercice 4. *Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln(x)$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3+x-2}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+e^x)}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln(x)e^x$.

Exercice 5. *Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée.*

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)\cos(x)}{2}$,
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sin(x)}$,
3. $x \mapsto xe^{-x}$,
4. $x \mapsto \dfrac{x}{e^x}$.
5. $x \mapsto \dfrac{x^2\ln(x) - x}{x}$.

Exercice 6. *Trouver une primitive des fonctions suivantes :*

1. $x \mapsto 2xe^{x^2}$;
2. $x \mapsto e^x e^{e^x}$;
3. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$;
4. $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$;
5. $x \mapsto -e^{1-x}$
6. $x \mapsto (x-1)e^{(x-1)^2}$;
7. $x \mapsto \dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$;
8. $x \mapsto \dfrac{6x+1}{3x^2+x+1}$;
9. $x \mapsto 3xe^{x^2}$;
10. $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$;
11. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)+1}{x\ln(x)+1}$;
12. $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Exercice 7.

1. *Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.*
2. *On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par :*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{3}{2}\ln(x+1).$$

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1,2]$. On pourra utiliser le fait que $7 < e^2 < 8$.

3. *Soit `eps`>0. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée de α à `eps` près à l'aide de la méthode de dichotomie.*

```
import numpy as np

def approx(eps):
    a = 1
    b = 2
    while _________ :
        c = (a+b)/2
        if 3/2*np.log(c+1) < c :
            _________
        else :
            _________
    return (a+b)/2
```

2.2 Suites

Exercice 8.

1. *Que peut-on dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante et majorée par 2 ? On citera précisément le théorème utilisé.*
2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = (1-x)^3 + x.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0.4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) i. *Dresser le tableau de variations de* f.
ii. *Démontrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
(b) *Monter que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
(c) *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle ?*

Exercice 9.

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *exprimer* u_n *en fonction de* n.

2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \text{ et } u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *exprimer* u_n *en fonction de* n.

2.3 Comparaisons et DL

Exercice 10. *Déterminer un équivalent simple de chacune des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suivantes.*

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\ln n + 2}{4n + 1 + 3^n}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} - 1$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - \sqrt{4n^2 + n + 1}$.

Exercice 11. *Déterminer le DL des fonctions suivantes en* 0.

1. $\forall x \in]-1, +\infty[,\ a(x) = -x + \ln(1 + x)$ *à l'ordre 2.*
2. $\forall x \in]-1, +\infty[,\ b(x) = (x + 1)\sqrt{x + 1} - 1$ *à l'ordre 2.*

Exercice 12. *Déterminer, à l'aide d'un DL, un équivalent en* 0 *de la fonction* f *définie sur* $]0, +\infty[$ *par :*

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{e^x - 1 - \ln(1 + x)}{x^2}.$$

3 Probabilités

Exercice 13. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in]0, 1[$.

1. (a) *Rappeler la définition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres* n *et* p, *son espérance et sa variance.*
(b) *Retrouver l'expression de l'espérance par le calcul.*
2. *On considère une équipe de* n *tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier tir est* p *et celle de toucher la cible au second tir est aussi égale à* p. *On suppose qu'il existe un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *qui modélise*

cette expérience de sorte que les tireurs et les tirs sont indépendants. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et Y la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs.

(a) *Dans cette question, on considère le cas d'un seul tireur. Quelle est la probabilité de toucher la cible au premier et deuxième tir ?*

(b) *Déterminer $X(\Omega)$ puis reconnaître la loi de X (en justifiant soigneusement).*

(c) *Déterminer de même la loi de Y.*

(d) *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*

Exercice 14.

1. *Donner la définition d'un système complet d'événements.*
2. *Énoncer la formule des probabilités totales.*
3. *Une information est transmise à l'intérieur d'une population. A chaque étape, avec une probabilité q, c'est l'information correcte qui est transmise d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-q$, c'est l'information contraire qui est transmise. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'événement « l'information après n transmissions est correcte » et $p_n = P(I_n)$.*

   (a) *Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(I_n, \overline{I}_n)$ est un système complet d'événements.*

   (b) *En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.*

   (c) *En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de p_n en fonction de q et de n.*

Exercice 15.

1. *Rappeler le théorème de transfert.*
2. *Dans chaque cas, calculer $E(Y)$.*

   (a) $Y = n - X$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,

   (b) $Y = 2^X$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

4 Algèbre

4.1 Systèmes linéaires

Exercice 16. *Résoudre les systèmes suivants :*

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 3 \\ x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 0 \end{array}\right.$;

2. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t & = & 1 \\ 2x+y-z+t & = & -1 \end{array}\right.$.

4.2 Espaces vectoriels

Exercice 17.

1. *Rappeler la définition d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Montrer que l'ensemble $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y-t=0 \quad \text{et} \quad y=t\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et trouver une famille génératrice de E.*

Exercice 18. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x-y, y+z, 0).$$

1. *Montrer que f est linéaire.*
2. *Déterminer une base de son noyau et une base de son image.*
3. *Est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?*
4. *Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
5. (a) *Montrer que la famille $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On la notera $\mathcal{B}'$.*
   (b) *On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \quad ; \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \quad ; \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},'\mathcal{B}}(f).$$

5 Python

Exercice 19.

1. *Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre réel x et qui renvoie $2x^3 - 3x + 7$.*
2. *En important la bibliothèque* `matplotlib.pyplot`*, écrire les commandes permettant d'afficher le graphe de la fonction $x \mapsto 2x^3 - 3x + 7$ sur l'intervalle $[-1, 1]$*

Exercice 20.

1. *À l'aide d'une boucle* `for`*, écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^k - k^2)$.*
2. *Calculer cette somme à la main.*

Exercice 21.

1. *Donner des commandes permettant de construire les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Écrire une commande permettant de remplacer le coefficient $(1,3)$ de A par 7.*
3. *Écrire une commande permettant d'afficher la première ligne de A (sans la recopier à la main...).*