Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DM0

1 Échauffements

Exercice 1.

1. *Mettre chacune des expressions suivantes sous la sous la forme* $a \times q^n$.
   (a) $\dfrac{2^{n-1}}{3^{3n}} \times \dfrac{1}{5^{n+1}} = \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{2}{135}\right)^n$,
   (b) $\dfrac{-2^n}{7^n} \times \dfrac{(-3)^n}{5^{2n+1}} = \dfrac{-1}{5} \times \left(\dfrac{-6}{175}\right)^n$,
   (c) $\dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{1}{8^n} = \left(\dfrac{1}{32}\right)^n$,
   (d) $\dfrac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}} = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$.
2. *Factoriser les expressions suivantes le plus possible.*
   (a) $2x + x^2 = x(2+x)$,
   (b) $e^x + e^{2x} = e^x(1+e^x)$,
   (c) $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$,
   (d) $(1-2p)^{n-1} - 2n(1-p)^n$,
   (e) $1 - q^3 = (1-q)(1+q+q^2) = (1-q)(q - \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2})(q - \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2})$.

Exercice 2. *Les ensembles de définition n'étant pas précisés, on a le choix ; la plupart d'entre vous a considéré x réel (et certains x complexe pour 2.a)). Je donne les solutions pour x réel.*

1. (a) $x = -1$,
   (b) *Pas de solution.*
2. (a) *Il faudrait* $e^x = -1$ *donc pas de solution.*
   (b) *Pas de solution.*
3. (a) $\ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$,
   (b) *Pas de solution.*
   (c) $\ln(x) + 1 = \ln(x) - 3$.

Exercice 3. *Calculer les sommes suivantes.*

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{10} (2k-3) = 81$;
2. $\dfrac{1}{2^{10}} + \dfrac{1}{2^{20}} + \dfrac{1}{2^{30}} + \cdots + + \dfrac{1}{2^{1000}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{100} \dfrac{1}{(2^{10})^k} = \dfrac{1}{2^{10}} \dfrac{1 - \frac{1}{(2^{10})^{100}}}{1 - \frac{1}{2^{10}}}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=3}^{11}(n^2-3n+4)=348$;
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$;
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln(n+1)$.

2 Analyse

2.1 Fonctions

Exercice 4.

1. $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\ln(x)=+\infty$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^3+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+2)}=\frac{1}{4}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x(1+e^{-x}))}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln(1+e^{-x})}{x}=1$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln(x)e^x=-\infty$.

Exercice 5. 1. $f : x\mapsto\dfrac{\ln(x)\cos(x)}{2}$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *(à cause du* $\ln$*) et :*

$$\forall x>0,\quad f'(x)=\frac{\cos(x)-x\ln(x)\sin(x)}{2x}.$$

2. $f : x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{\sin(x)}$, *est dérivable sur* $]0,+\infty[\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ *et :*

$$\forall x\in]0,+\infty[\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\},\quad f'(x)=\frac{\sin(x)-x\ln(x)\cos(x)}{x\sin^2(x)}.$$

3. $f : x\mapsto xe^{-x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=-xe^{-x}+e^{-x}.$$

4. $f : x\mapsto\dfrac{x}{e^x}$ *est la même fonction que la précédente.*
5. $f : x\mapsto\dfrac{x^2\ln(x)-x}{x}$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et*

$$\forall x>0,\quad f'(x)=\ln(x)+1.$$

Exercice 6. *Les primitives sont (C est une constante) :*

1. $x \mapsto e^{x^2} + C$;
2. $x \mapsto e^{e^x} + C$;
3. $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$;
4. $x \mapsto \ln(e^x+2) + C$;
5. $x \mapsto e^{1-x} + C$
6. $x \mapsto \frac{1}{2}e^{(x-1)^2} + C$;
7. $x \mapsto \ln\left(e^{x^2}+1\right) + C$;
8. $x \mapsto \ln|3x^2+x+1| + C$;
9. $x \mapsto \frac{3}{2}e^{x^2} + C$;
10. $x \mapsto e^{\frac{1}{x}} + C$;
11. $x \mapsto \ln\left(|x\ln(x)+1|\right) + C$;
12. $x \mapsto \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + C$.

Exercice 7.

1. *Voir cours de première année.*
2. *La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est dérivable (donc continue) sur $]-1,+\infty[$ et :*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{3}{2(x+1)} - 1 = \frac{1-2x}{2(x+1)}.$$

Ainsi g' est strictement négative sur $[1,2]$ donc g est strictement décroissante sur $[1,2]$.
D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[g(2),g(1)]$. Il reste à montrer que $0 \in [g(2),g(1)]$ pour avoir l'existence d'un unique α tel que

$$g(\alpha) = 0 \quad i.e \quad f(\alpha) = \alpha.$$

Or

$$g(2) = \frac{3}{2}\ln(3) - 2 \leq 0 \iff \frac{3}{2}\ln(3) \leq 2 \iff 3^{\frac{3}{2}} \leq e^2 \iff \sqrt{27} \leq e^2$$

Comme $\sqrt{27} \leq 7 < e^2$ alors $g(2) \leq 0$. De même :

$$g(1) = \frac{3}{2}\ln(2) - 1 \geq 0 \iff \frac{3}{2}\ln(2) \geq 1 \iff 2^{\frac{3}{2}} \leq e \iff 2^3 \geq e^2$$

Donc $g(1) \geq 0$ et ce qui précède permet de conclure.

3. *Soit* `eps`*>0. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée de α à* `eps` *près à l'aide de la méthode de dichotomie.*

```python
import numpy as np

def approx(eps):
    a = 1
    b = 2
    while b-a>eps :
        c = (a+b)/2
        if 3/2*np.log(c+1) < c :
            b = c
        else :
            a = c
    return (a+b)/2
```

2.2 Suites

Exercice 8.

1. *On peut dire, d'après le théorème de convergence monotone, que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge et que sa limite* $\ell \leq 2$.
2. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = (1-x)^3 + x.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $u_0 = 0.4$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(a) i. *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f'(x) = -3(1-x)^2 + 1 = -3x^2 + 6x - 2.$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré, donc :

x	$-\infty$		$1-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$1+\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

ii. *En se concentrant sur* $[0,1]$, *le tableau devient :*

x	0		$1-\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
f	1	$\searrow$		$\nearrow$	1

avec :

$$f\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} > 0.$$

Ainsi, $f([0,1]) \subset [0,1]$

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *soit* $\mathcal{P}(n)$ *la proposition « $u_n \in]0,1[$ » et montrons par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ *est vraie.*

- *Initialisation : comme* $u_0 = 0.4$, $\mathcal{P}(0)$ *est vraie.*
- *Hérédité : supposons* $\mathcal{P}(n)$ *vraie pour un certain entier naturel* n *et montrons que* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.*

  Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in]0,1[$. *D'après* $(*)$, *on a donc :*

  $$u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1[.$$

  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.*
- *Conclusion : par le principe de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0,1[.$$

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n < 1$, on a :*

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = (1 - u_n)^3 > 0.$$

Donc $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
La suite est donc croissante.

(c) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge.*

Exercice 9.

1. *C'est une suite arithmético-géométrique.*

   - *On cherche le point fixe : soit $x \in \mathbb{R}$.*

     $$x = 2x - 3 \Longleftrightarrow x = 3.$$

   - *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$. On a alors :*

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2(u_n - 3) = 2v_n.$$

     Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison 2 :

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2^n v_0 = -2^n.$$

   - *Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

     $$u_n = v_n + 3 = -2^n + 3.$$

2. *C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est :*

   $$x^2 - 5x + 4 = 0$$

   dont les solutions sont $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. Il existe donc deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$u_n = A \times 4^n + B \times 1^n.$$

   On détermine A et B en s'aidant de u_0 et u_1 :

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} 2 = u_0 & = & A + B \\ 3 = u_1 & = & 4A + B \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3A & = & 1 \\ 3 & = & 4A + B \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} A & = & \dfrac{1}{3} \\ B & = & \dfrac{5}{3} \end{array} \right.$$

   Finalement :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{3}4^n + \frac{5}{3}.$$

2.3 Comparaisons et DL

Exercice 10. *Déterminer un équivalent simple de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes.*

1. *On a pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*
$$u_n = \ln\left(1 + 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right) \quad \textit{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} = 0.$$
Par équivalent usuel on a :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}.$$
Or comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ *encore par équivalent usuel :*
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{3^n}$.
3. *Comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$ *par équivalent usuel :*
$$u_n = \sqrt{1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *par équivalent usuel*
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$
4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$
$$u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} - 1.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ *(croissance comparée) par équivalent usuel*
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$
5. *Ici, on va multiplier par la quantité conjuguée :*
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ u_n &= \sqrt{4n^2+5n+2} - \sqrt{4n^2+n+1}\\ &= \left(\sqrt{4n^2+5n+2} - \sqrt{4n^2+n+1}\right) \times \frac{\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1}}{\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1}}\\ &= \frac{4n+1}{\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1}}.\end{aligned}$$
Le numérateur est équivalent à $4n$ *par les équivalents usuels.*
Pour le dénominateur, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a :*
$$\begin{aligned}\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1} &= \sqrt{4n^2\left(1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}\right)} + \sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)}\\ &= 2n\sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}} + 2n\sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}}\\ &= 2n\left(\sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}}\right)\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}} = 2$. *Donc, par compatibilité avec le produit, on a :*

$$\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\times 2,$$

puis, par compatibilité avec le quotient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n}{2n\times 2}.$$

Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

Exercice 11. *Déterminer le DL des fonctions suivantes en* 0.

1. *D'après les DL usuels, on a :*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2).$$

Par conséquent :

$$a(x) = -x + x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2) = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2).$$

2. *On remarque que :*

$$b(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} - 1.$$

Donc par DL usuel :

$$b(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2) - 1 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2).$$

Exercice 12. *D'après les DL usuels, on a :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} e^x - 1 - \ln(1+x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2) - 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)\right) \\ &= x^2 + \underbrace{\underset{x\to0}{o}(x^2) - \underset{x\to0}{o}(x^2)}_{=\underset{x\to0}{o}(x^2)} \\ &= x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on obtient :

$$e^x - 1 - \ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x^2.$$

Par compatibilité des équivalents avec le passage au quotient on obtient :

$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

3 *Probabilités*

Exercice 13. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.*

1. (a) *Voir cours.*

   (b) *Soit X suivant une loi binomiale de paramètres n et p.*

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}p^{i+1}(1-p)^{n-i-1} \\ &= np\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}p^{i}(1-p)^{n-1-i} \\ &= np(p+1-p)^n \\ &= np. \end{aligned}$$

2. (a) *,(b) et (c) On va commencer par étudier la loi de X. On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'événement S : « le tireur touche deux fois la cible ». Comme les deux tirs d'un tireur sont supposés indépendants, on a :*

$$\begin{aligned} P(S) &= P\left([\textit{atteindre la cible au } 1^{er} \textit{ tir}] \cap [\textit{atteindre la cible au } 2^{er} \textit{ tir}]\right) \\ &= P\left([\textit{atteindre la cible au } 1^{er} \textit{ tir}]\right) P\left([\textit{atteindre la cible au } 2^{er} \textit{ tir}]\right) \\ &= p^2. \end{aligned}$$

Maintenant, si on répète cette épreuve de Bernoulli avec n tireurs indépendants, la variable X compte le nombre de tireurs ayant eu un succès. Ainsi X suit la loi $\mathcal{B}(n, p^2)$.

Étudions maintenant la loi de Y. On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'événement S : « le tireur touche exactement une fois la cible ». Comme les deux tirs d'un tireur sont supposés indépendants, on a :

$$\begin{aligned} P(S) &= P\left([\textit{atteindre la cible au } 1^{er} \textit{ tir}] \cap [\textit{rater la cible au } 2^{er} \textit{ tir}]\right) \\ &+ P\left([\textit{rater la cible au } 1^{er} \textit{ tir}]\right) P\left([\textit{atteindre la cible au } 2^{er} \textit{ tir}]\right) \\ &= p(1-p) + (1-p)p \\ &= 2p(1-p). \end{aligned}$$

Maintenant, si on répète cette épreuve de Bernoulli avec n tireurs indépendants, la variable Y compte le nombre de tireurs ayant eu un succès. Ainsi Y suit la loi $\mathcal{B}(n, 2p(1-p))$.

(b) *Les événements $[X=n]$ et $[Y=1]$ sont incompatibles car il n'y a que n tireurs. Donc*

$$P([X=n, Y=1]) = 0.$$

D'autre part,

$$P([X=n]) = p^{2n} \quad et \quad P([Y=1]) = n2p(1-p)(1-2p(1-p))^{n-1}.$$

Comme $p \in]0,1[$, on obtient donc

$$P([X=n]) \neq 0 \quad et \quad P([Y=1]) \neq 0$$

et par conséquent,

$$P([X=n])\, P([Y=1]) \neq P([X=n, Y=1]).$$

Ainsi X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 14.

1. *Voir cours.*
2. *Voir cours.*
3. *Une information est transmise à l'intérieur d'une population. A chaque étape, avec une probabilité q, c'est l'information correcte qui est transmise d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-q$, c'est l'information contraire qui est transmise. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'événement « l'information après n transmissions est correcte » et $p_n = P(I_n)$.*

   (a) *Soit $n \in \mathbb{N}$, par définition du complémentaire, on a (en notant Ω l'univers) :*

   $$I_n \cup \overline{I}_n = \Omega \quad et \quad I_n \cap \overline{I}_n = \emptyset.$$

   Donc $(I_n, \overline{I}_n)$ est un système complet d'événements.

   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales :*

   $$\begin{aligned} p_{n+1} = P(I_{n+1}) &= P_{I_n}(I_{n+1})P(I_n) + P_{\overline{I}_n}(I_{n+1})P(\overline{I}_n) \\ &= q \times p_n + (1-q) \times (1-p_n) \\ &= (2q-1)p_n + 1 - q \end{aligned}$$

   (c) *On en déduit que $(p_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique.*

   Le point fixe de la fonction associée est $\frac{1}{2}$ et on vérifie que la suite $(p_n - \frac{1}{2})_n$ est géométrique de raison $2q-1$. On en déduit :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = (2q-1)^n(u_0 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2q-1)^n + \frac{1}{2}.$$

Exercice 15.

1. *Voir cours.*
2. *Dans chaque cas, calculer $E(Y)$.*

   (a) *Par linéarité :*

   $$E(Y) = E(n-X) = n - E(X) = n - np.$$

(b) Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(Y) = E(2^X) = \sum_{k=0}^{n} 2^k P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (2p+1-p)^n \\ &= (p+1)^n. \end{aligned}$$

4 Algèbre

4.1 Systèmes linéaires

Exercice 16.

1. *On trouve* $(x,y,z) = (-1,0,2)$.
2. *On trouve comme ensemble de solution :* $\{(x, t - \frac{3}{2}x, 1 + 2t + \frac{x}{2}, t) \ ; \ x,t \in \mathbb{R}\}$.

4.2 Espaces vectoriels

Exercice 17.

1. *Voir cours.*
2. *On a :*

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \quad et \quad y = t\right\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x = 0 \quad et \quad y = t\right\} \\ &= \left\{(0,t,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ t,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{z(0,0,1,0) + t(0,1,0,1) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ t,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((0,0,1,0),(0,1,0,1)). \end{aligned}$$

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et $((0,0,1,0),(0,1,0,1))$ est une famille génératrice de E.

Exercice 18. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x - y, y + z, 0).$$

1. *Soit $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\begin{aligned} f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\ &= (2(x + \lambda x') - (y + \lambda y'), y + \lambda y' + z + \lambda z', 0) \\ &= (2x - y, y + z, 0) + \lambda(2x' - y', y' + z', 0) \\ &= f(x,y,z) + \lambda f(x',y',z') \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) = f(x,y,z) + \lambda f(x',y',z').$$

Donc f est linéaire.

2. *Pour le noyau : soit* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} 2x - y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y &= 2x \\ z &= -2x \end{cases}$$

Donc : $\ker(f) = \{(x, 2x, -2x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 2, -2))$.
Pour l'image, puisque $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) &= \mathrm{Vect}((2,0,0), (-1,1,0), (0,1,0)) \\ &= \mathrm{Vect}((2,0,0), (0,1,0))\end{aligned}$$

car $(-1, 1, 0) = (0, 1, 0) - \dfrac{1}{2}(2, 0, 0)$.
La famille $((2, 0, 0), (0, 1, 0))$ *est génératrice de* $\mathrm{Im}(f)$*. De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. C'est donc une base de* $\mathrm{Im}(f)$.

3. *Son noyau n'est pas réduit au vecteur nul donc elle n'est pas injective.*
Son image n'est pas égale à $\mathbb{R}^3$ *(car de dimension* 2 *d'après la question précédente) donc elle n'est pas surjective.*
Elle n'est donc pas bijective non plus.

4. *Pour déterminer sa matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *:*
   — *On calcule les images des vecteurs de la base canonique :*

   $$f(1,0,0) = (2,0,0) \quad ; \quad f(0,1,0) = (-1,1,0) \quad ; \quad f(0,0,1) = (0,1,0).$$

   — *On détermine les coordonnées de chacune des trois images dans la base canonique.*
   — *La matrice donc les colonnes sont les coordonnées de chacun de ces trois images dans la base canonique est la matrice voulue :*

   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) *Montrer que la famille* $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ *est libre : soit* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. *On a*

   $$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,0,0) = (0,0,0) \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{cases}$$

   La famille $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ *est donc libre.*
   De plus, elle est formée de 3 *vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^3$ *est de dimension* 3*. Par conséquent, c'est une base de* $\mathbb{R}^3$.

   (b) i. *Pour déterminer la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ *:*
   — *On calcule les images des vecteurs de la base* $\mathcal{B}'$ *:*

   $$f(1,1,1) = (1,2,0) \quad ; \quad f(1,1,0) = (1,1,0) \quad ; \quad f(1,0,0) = (2,0,0).$$

— *On détermine les coordonnées de chacune des trois images dans la base* $\mathcal{B}'$.
Les coordonnées de $f(1,1,1) = (1,2,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,2,-1)$ *car*

$$(1,2,0) = 0 \times (1,1,1) + 2 \times (1,1,0) - (1,0,0).$$

Les coordonnées de $f(1,1,0) = (1,1,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,1,0)$ *car*

$$(1,1,0) = 0 \times (1,1,1) + (1,1,0) + 0 \times (1,0,0).$$

Les coordonnées de $f(1,0,0) = (2,0,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,0,2)$ *car*

$$(2,0,0) = 0 \times (1,1,1) + 0 \times (1,1,0) + 2 \times (1,0,0).$$

— *La matrice donc les colonnes sont les coordonnées de chacun de ces trois images dans la base* $\mathcal{B}'$ *est la matrice voulue :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii. Pour déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ *:*

— *On calcule les images des vecteurs de la base* $\mathcal{B}$ *:*

$$f(1,0,0) = (2,0,0) \quad ; \quad f(0,1,0) = (-1,1,0) \quad ; \quad f(0,0,1) = (0,1,0).$$

— *On détermine les coordonnées de chacune des trois images dans la base* $\mathcal{B}'$.
Les coordonnées de $f(1,0,0) = (2,0,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,0,2)$ *car*

$$(2,0,0) = 0 \times (1,1,1) + 0 \times (1,1,0) + 2 \times (1,0,0).$$

Les coordonnées de $f(0,1,0) = (-1,1,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,1,-2)$ *car*

$$(-1,1,0) = 0 \times (1,1,1) + (1,1,0) - 2 \times (1,0,0).$$

Les coordonnées de $f(0,0,1) = (0,1,0)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(0,1,-1)$ *car*

$$(0,1,0) = 0 \times (1,1,1) + (1,1,0) - (1,0,0).$$

— *La matrice donc les colonnes sont les coordonnées de chacun de ces trois images dans la base* $\mathcal{B}'$ *est la matrice voulue :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii. Pour déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ *:*

— *On calcule les images des vecteurs de la base* $\mathcal{B}'$ *:*

$$f(1,1,1) = (1,2,0) \quad ; \quad f(1,1,0) = (1,1,0) \quad ; \quad f(1,0,0) = (2,0,0).$$

- *On détermine les coordonnées de chacune des trois images dans la base $\mathcal{B}$.*
  Les coordonnées de $f(1,1,1) = (1,2,0)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1,2,0)$.
  Les coordonnées de $f(1,1,0) = (1,1,0)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1,1,0)$.
  Les coordonnées de $f(1,0,0) = (2,0,0)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(2,0,0)$.
- *La matrice donc les colonnes sont les coordonnées de chacun de ces trois images dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice voulue :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Python

Exercice 19.

1. *Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre réel x et qui renvoie $2x^3 - 3x + 7$.*

```
def f(x):
        return 2*x**3-3*x+7
```

2. *En important la bibliothèque* `matplotlib.pyplot`*, écrire les commandes permettant d'afficher le graphe de la fonction $x \mapsto 2x^3 - 3x + 7$ sur l'intervalle $[-1, 1]$*

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

X = np.linspace(-1,1,100)
Y = f(X)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

Exercice 20.

1. *À l'aide d'une boucle* `for`*, écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n}(2^k - k^2)$.*

```
def S(n):
        S = 0
        for k in range(n+1):
                S = S + 2**k-k**2
        return S
```

2. *Calculer cette somme à la main :*

$$\sum_{k=0}^{n}(2^k - k^2) = \sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{k=0}^{n} k^2 = 2^{n+1} - 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 21.

```
# avec des listes de listes

A = [[1,1,0],[1,2,3],[0,1,0]]
B = [[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]]
A[0][2]=7
print(A[0])
# avec des tableaux numpy

A = np.array([[1,1,0],[1,2,3],[0,1,0]])
B = np.zeros([3,3])
A[0,2]=7
print(A[0,:])
```