Révisions 2

# Révisions sur les fonctions

Ce chapitre de révision reprend l'essentiel des chapitres Analyse 2, Analyse 3, Analyse 6, Analyse 7 et Analyse 9 du programme de première année (voir le programme officiel) mais ne se substitue pas aux cours que vous avez eus l'an dernier.

## Sommaire


**2.1 Généralités sur les fonctions** . . . . . **14**
**2.2 Limites et continuité** . . . . . **15**
2.2.1 Limites . . . . . 15
2.2.2 Continuité . . . . . 16
**2.3 Dérivation** . . . . . **17**
**2.4 Développements limités** . . . . . **18**
**Formulaires** . . . . . **20**
Fonctions usuelles . . . . . 20
Limites . . . . . 26
Formules de dérivations . . . . . 28
Développements limités . . . . . 30

## 2.1 Généralités sur les fonctions

**Définition 2.1**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ non vide et non réduit à un point.

1. Si $I$ est symétrique par rapport à 0, on dit que :
   - $f$ est **paire** si : $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$;
   - $f$ est **impaire** si : $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.
2. On dit que $f$ est $T$-**périodique** si
   - $f$ est définie sur un domaine $D$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D \Rightarrow x + T \in D$,
   - $\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)$.
3. On dit que $f$ est **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur l'**intervalle** $I$ si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp. } x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$
4. On dit que $f$ est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur l'**intervalle** $I$ si :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (\text{resp. } x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$
5. On dit que $f$ est **majorée** par $M$ sur $I$ si :
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq M.$$
6. On dit que $f$ est **minorée** par $m$ sur $I$ si :
$$\forall x \in I, \quad m \leq f(x).$$
7. On dit que $f$ est **bornée** sur $I$ si elle est majorée et minorée sur $I$.

## 2.2 Limites et continuité

### 2.2.1 Limites

**Définition 2.2**

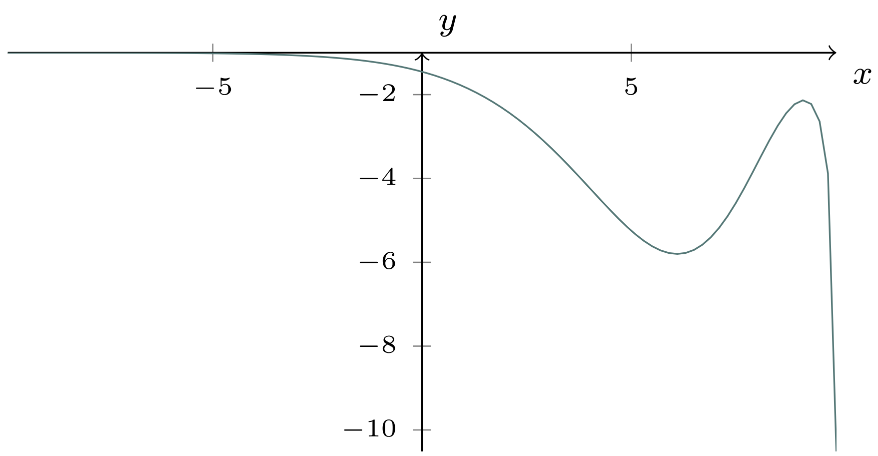
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $a$ un élément ou une borne de $I$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On dit que $f$ **a pour limite** $\ell$ **en** $a$ lorsque :
   - si $a \in \mathbb{R}$ : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$,
   - si $a = +\infty$ : $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ ,
   - si $a = -\infty$ : $\forall \varepsilon > 0\ \exists A < 0\ \forall x \in I, \quad x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
2. On dit que $f$ **a pour limite** $+\infty$ **en** $a$ lorsque :
   - si $a \in \mathbb{R}$ : $\forall A > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$,
   - si $a = +\infty$ : $\forall A > 0\ \exists B > 0\ \forall x \in I, \quad x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$,
   - si $a = -\infty$ : $\forall A > 0\ \exists B < 0\ \forall x \in I, \quad x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A$.
3. On dit que $f$ **a pour limite** $-\infty$ **en** $a$ lorsque :
   - si $a \in \mathbb{R}$ : $\forall A < 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq A$,
   - si $a = +\infty$ : $\forall A < 0\ \exists B > 0\ \forall x \in I, \quad x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A$,
   - si $a = -\infty$ : $\forall A < 0\ \exists B < 0\ \forall x \in I, \quad x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A$.

Dans tous les cas ($\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_a f = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

**Exemple 2.1.** On illustre sur la figure ci-dessous quelques cas de cette définition :



**Théorème 2.0** (Résultats fondamentaux)

1. **Passage à la limite dans les inégalités larges :** si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de $a$ alors (sous réserve d'existence) :

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

2. **Théorème de la limite monotone :** soit $f$ une fonction croissante sur $I = ]a, b[$. Alors $f$ admet une limite à droite en $a$ (finie si $f$ est minorée et égale à $-\infty$ sinon) et une limite à gauche en $b$ (finie si $f$ est majorée et égale à $+\infty$ sinon).

   *Le résultat s'adapte aux fonctions décroissantes.*

3. **Théorème des gendarmes :** soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur un intervalle $I$ et $a$ un élément ou une borne de $I$.

   Si $f$ et $h$ admettent une même limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $a$ et qu'au voisinage de $a$ on a : $f \leq g \leq h$. Alors :

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell.$$

### 2.2.2 Continuité

**Définition 2.3** (Continuité)

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et soit $a \in I$.

1. On dit que $f$ **est continue en** $a$ si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

2. On dit que $f$ **est continue sur** $I$ si elle est continue en tout point de $I$.

**Méthode 2.1** (Montrer qu'une fonction est continue)

1. En général, pour montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle $I$ on utilise :
   - les connaissances sur la continuité des fonctions usuelles ;
   - le fait que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur ne s'annule pas), la composée de fonctions continues sont continues.
2. Dans certains cas, on est obligé de revenir à la définition et d'étudier la limite de la fonction en certains points.

**Théorème 2.0** (Résultats fondamentaux)

1. **Prolongement par continuité :** si $f$ est définie sur $I\backslash\{a\}$ et admet une limite finie $\ell$ en $a$ alors la fonction $g$ définie sur $I$ par :
$$\forall x \in I, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$
est continue en $a$.
2. **Théorème des bornes atteintes :** soit $f$ un fonction continues sur un segment $[a, b]$. Alors $f$ est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.
3. **Théorème des valeurs intermédiaires :** soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et soit $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$. Alors pour tout réel $c$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = c$.
4. **Théorème de la bijection :** soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$. Alors $f(I)$ est un intervalle, $f$ réalise une bijection de $I$ sur $f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de monotonie que $f$.

## 2.3 Dérivation

**Définition 2.4**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a \in I$.

1. On dit que $f$ est **dérivable en** $a$ si la limite suivante existe et est finie : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Dans ce cas cette limite est appelé le nombre dérivé de $f$ en $a$ et noté $f'(a)$.
2. La fonction $f$ est dite **dérivable sur** $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$.
3. La fonction $f$ est dite **de classe $\mathcal{C}^k$ sur** $I$ si elle est $k$ fois dérivable sur $I$ et de dérivée $k$-ième continue.

**Méthode 2.2** (Montrer qu'une fonction est dérivable/$\mathcal{C}^k$)

1. En général, pour montrer qu'une fonction est dérivable/$\mathcal{C}^k$ sur un intervalle $I$ on utilise :
   - les connaissances sur la dérivabilité des fonctions usuelles ;
   - le fait que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur ne s'annule pas), la composée de fonctions, la bijection réciproque de fonctions dérivables/$\mathcal{C}^k$ sont dérivables/$\mathcal{C}^k$.
2. Dans certains cas, on est obligé de revenir à la définition et d'étudier la limite du taux d'accroissement.

**Théorème 2.0** (Résultats fondamentaux)

1. **Théorème de Rolle :** si $f$ est définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$) et telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. **Théorème des accroissements finis :** si $f$ est définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$) alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

## 2.4 Développements limités

**Définition 2.5** (Développement limité en 0)

Déterminer un développement limité à l'ordre $n$ en 0 d'une fonction $f$ consiste à déterminer, s'ils existent, des réels $a_0, \dots, a_n$ tel que pour tout $x$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

**Théorème 2.0** (Formule de Taylor-Young)

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle contenant 0. Alors $f$ admet le développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0 suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

**Méthode 2.3** (Calculs de limites)

Les développements limités sont utiles pour :

- le calculs d'équivalents, de limites ;
- étudier le prolongement par continuité, la dérivabilité d'un prolongement par continuité d'une fonction.

**Méthode 2.4** (Position relative par rapport à une tangente)

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un élément de $I$.

1. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède une tangente non vertical en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable en $a$.

   l'équation réduite de la tangente est alors donnée par **la partie polynomiale du DL$_1$ de $f$ en $a$.**
2. Si $f$ admet un DL de la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n) \quad \text{où} \quad a_n \neq 0$$

   alors la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente est donnée par le signe de $a_n(x-a)^n$.
   - Cas $n$ pair : la courbe ne traverse pas sa tangente.
     — Si $a_n > 0$ : la courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage de $a$.
     — Si $a_n < 0$ : la courbe est en-dessous de sa tangente au voisinage de $a$.
   - Cas $n$ impair : la courbe traverse sa tangente.
     — Si $a_n > 0$ : la courbe est en-dessous pour $x < a$ puis au-dessus pour $x > a$.
     — Si $a_n < 0$ : la courbe est au-dessus pour $x < a$ puis en-dessous pour $x > a$.

**Méthode 2.5** (Asymptotes obliques)

Soit $f$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.

En effectuant le changement de variable $h = \dfrac{1}{x}$, $h$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $\pm\infty$ et on peut effectuer un DL en $h$ au voisinage de 0. En revenant à la variable $x$, si on obtient une expression de la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$.

# Formulaire – Fonctions usuelles

## Fonction $x \mapsto x^n$, $n \geq 2$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- **Parité :** de la parité de $n$.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ :** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = nx^{n-1}$.
- **Variations :**

Cas $n$ pair

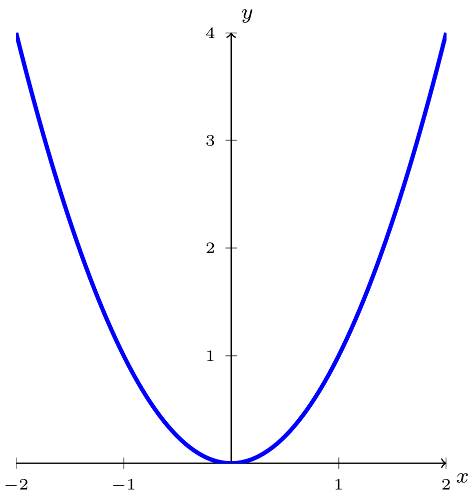
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Cas $n$ impair

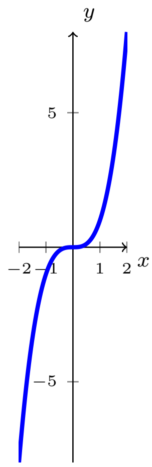
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $-\infty$ | | $\nearrow$ | | $+\infty$ |

- **Graphe :**

Cas $n$ pair (ici $n = 2$) :




Cas $n$ impair (ici $n = 3$) :



## Fonction $x \mapsto x^{-n}$, $n \geq 1$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
- **Parité :** de la parité de $n$.
- **Continue et dérivable sur** $\mathbb{R}^*$ **:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.
- **Variations :**

Cas $n$ pair

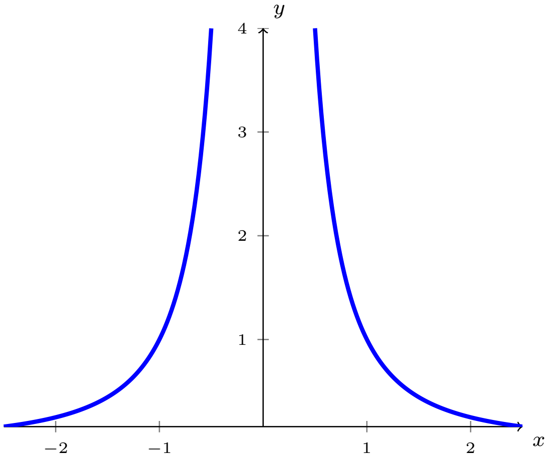
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $+$ | ‖ | $-$ |
| Variations de $f$ | $0 \nearrow +\infty$ | ‖ | $+\infty \searrow 0$ |

Cas $n$ impair

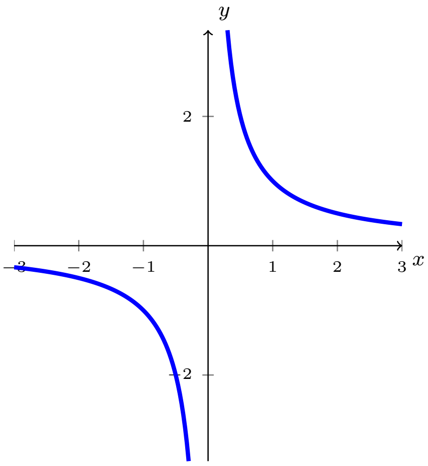
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $-$ | ‖ | $-$ |
| Variations de $f$ | $0 \searrow -\infty$ | ‖ | $+\infty \searrow 0$ |

- **Graphe :**

Cas $n$ pair (ici $n = 2$) :




Cas $n$ impair (ici $n = 3$) :



## Fonction logarithme

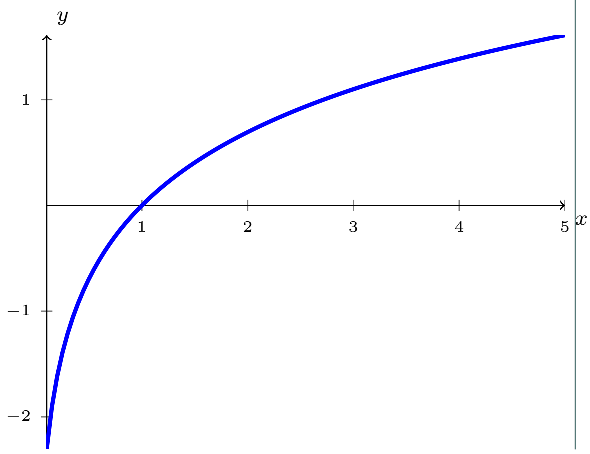
- **Définition :** la primitive sur $]0,+\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
- $\mathcal{D}_f = ]0,+\infty[$.
- **Continue et dérivable sur** $]0,+\infty[$ **:** $\forall x > 0,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- **Propriété :** pour tout $x, y > 0$ :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

- **Variations :**

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $\frac{1}{x}$ | | $+$ | |
| Variations de ln | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

- **Graphe :**




## Fonction exponentielle

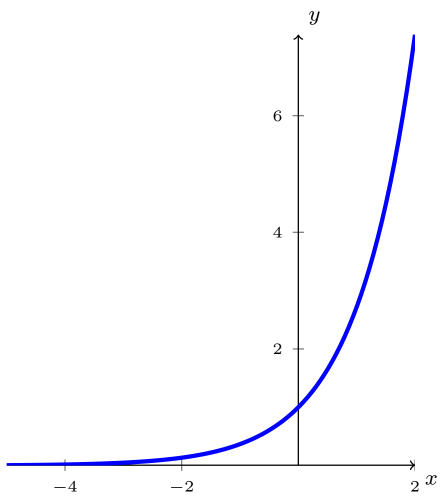
- **Définition :** bijection réciproque de ln.
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- **Continue et dérivable sur** $]\mathbb{R}$ **:** $\forall x > 0,\ \exp'(x) = \exp(x) = e^x$.
- **Propriété :** pour tout $x, y > 0$ :

$$e^{x+y)} = e^x e^y$$
$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

- **Variations :**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $e^x$ | | $+$ | |
| Variations de exp | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |

- **Graphe :**



### Fonction $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$

- **Définition :** $x^a = e^{a \ln(x)}$ pour $x > 0$.
- **Continue et dérivable sur** $]0, +\infty[$ **:** $\forall x > 0,\ f'(x) = a x^{a-1}$.
- **Variations :**

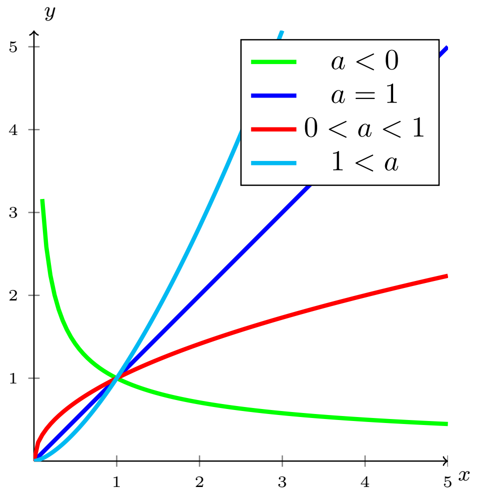
  Si $a < 0$ :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| Variations de $f$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow 1 \searrow$ | $0$ |

  Si $a > 0$ :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| Variations de $f$ | ‖ $0$ | $\nearrow 1 \nearrow$ | $+\infty$ |

- **Graphe :**




### Fonction $x \mapsto a^x$, $a > 0$

- **Définition :** $a^x = e^{x \ln(a)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- **Continue et dérivable sur** $\mathbb{R}$ **:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln(a) a^x$.
- **Variations :**

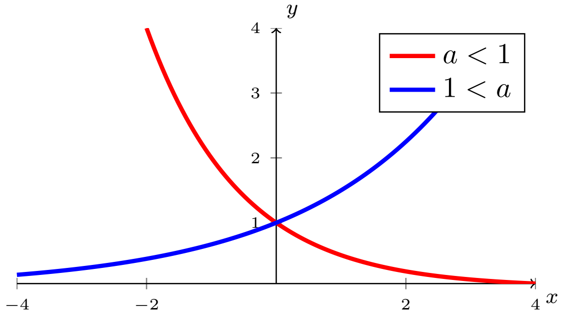
  Si $a < 1$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | |
| Variations de $f$ | $+\infty$ | $\searrow 1 \searrow$ | $0$ |

  Si $a > 1$ :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | |
| Variations de $f$ | $0$ | $\nearrow 1 \nearrow$ | $+\infty$ |

- **Graphe :**



## Fonction cosinus

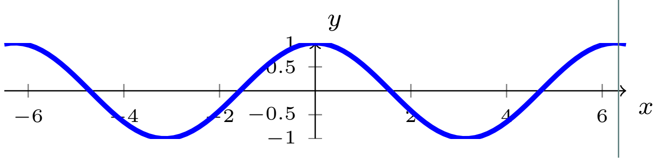
- **Domaine de définition :** $\mathbb{R}$.
- **Parité, périodicité :** paire, $2\pi$-périodique.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ :**

$$\cos' = -\sin.$$

- **Variations :**

| $x$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $\cos$ | $-1$ ↗ | $0$ ↗ | $1$ | ↘ $0$ | ↘ $-1$ |

- **Graphe :**




## Fonction sinus

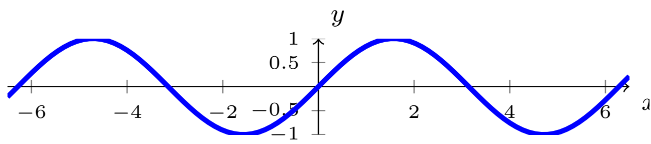
- **Domaine de définition :** $\mathbb{R}$.
- **Parité, périodicité :** impaire, $2\pi$-périodique.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ :**

$$\sin' = \cos.$$

- **Variations :**

| $x$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\sin$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ $0$ ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

- **Graphe :**



### Fonction tangente

- **Domaine de définition :**

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

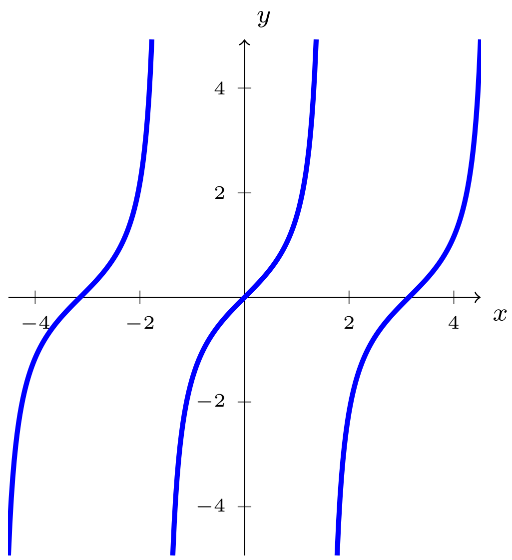
- **Parité, périodicité :** impaire, $\pi$-périodique.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ :**

$$\tan' = 1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

- **Variations :**

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\tan$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

- **Graphe :**




### Fonction arctangente

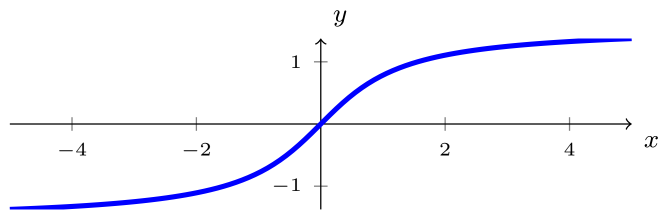
- **Définition :** bijection réciproque de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
- **Domaine de définition :** $\mathbb{R}$.
- **Parité :** impaire.
- **Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ :**

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- **Variations :**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\arctan$ | $-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$ |

- **Graphe :**



# Formulaire – Limites

| $a$ \ $\lim_a f$ | exp | ln | $x \mapsto x^n$ , $n \in \mathbb{N}^*$ |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | 0 | | $\pm\infty$ selon la parité de $n$ |
| 0 | 1 | $-\infty$ (en $0^+$) | 0 |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

Table 2.1 – Limites usuelles

| $\lim_a f$ | $\lim_a g$ | $\lim_a(f+g)$ | $\lim_a f \times g$ | $\lim_a \frac{f}{g}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ell$ | $\ell' \neq 0$ | $\ell + \ell'$ | $\ell\ell'$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ |
| $\ell \neq 0$ | 0 | $\ell$ | 0 | $\pm\infty$ $(*)$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | F.I |
| $\ell \neq 0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ $(*)$ | 0 |
| 0 | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | F.I | 0 |
| $\pm\infty$ | $\ell' \neq 0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ $(*)$ | $\pm\infty$ $(*)$ |
| $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ | F.I | $\pm\infty$ $(*)$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | F.I | $-\infty$ | F.I |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | F.I |

Table 2.2 – Opérations sur les limites

- Le symbole $(*)$ signifie que le signe est à étudier selon la règle des signes.
- F.I désigne les formes indéterminées qu'il faut étudier au cas par cas.

**Proposition 2.1** (Croissances comparées)

Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels strictement positifs.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{bx^c}}{x^a} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0} x^a(\ln(x))^b = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^a e^{bx} = 0.$$

**Proposition 2.2** (Équivalents usuels)

Les équivalents suivants sont à connaître par cœur :

1. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ ;
2. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ ;
3. $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ ;
4. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ ;
5. $(1+x)^a - 1 \underset{x\to 0}{\sim} ax$ où $a \neq 0$ ;
6. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
7. Soient $n > p$ et $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p+1}$ avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$.
   - En $+\infty$ et $-\infty$ :
   $$a_p x^p + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$
   - En 0 :
   $$a_p x^p + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p.$$

## Formulaire – Formules de dérivation

| Fonction | Dérivée | sur tout $I$ tel que : |
|---|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ | $u$ et $v$ dérivables sur $I$ |
| $\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}$ | $\lambda u'$ | $u$ dérivable sur $I$ |
| $uv$ | $u'v+v'u$ | $u$ et $v$ dérivables sur $I$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-v'u}{v^2}$ | $u$ et $v$ dérivables sur $I$ et $v$ ne s'annule pas sur $I$ |
| $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ | $v$ dérivable et ne s'annule pas sur $I$ |
| $u \circ v$ | $v' \times (u' \circ v)$ | $v$ dérivable sur $I$ et $u$ dérivable sur $v(I)$ |
| $u^{-1}$ | $\frac{1}{u' \circ u^{-1}}$ | $u$ dérivable et sa dérivée ne s'annule pas sur $u^{-1}(I)$ |
| $u^a,\ a \in \mathbb{R}$ | $au'u^{a-1}$ | $u$ dérivable et strictement positive sur $I$ |

Table 2.3 – Formules de dérivation

| Fonction | Dérivée | sur |
|---|---|---|
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\ln(x)$ | $\dfrac{1}{x}$ | $]0, +\infty[$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0, +\infty[$ |
| $x^n$, $n \in \mathbb{N}$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$, $n \in \mathbb{N} \backslash \mathbb{Z}$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $x^a$, $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ | $ax^{a-1}$ | $]0, +\infty[$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan(x)$ | $1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$ | $\mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \right\}$ |
| $\arctan(x)$ | $\dfrac{1}{1 + x^2}$ | $\mathbb{R}$ |

Table 2.4 – Dérivées usuelles

# Formulaire – Développements limités

| Fonction | Développement limité |
|---|---|
| $e^x$ | $= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ |
| $\frac{1}{1-x}$ | $= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ |
| $\frac{1}{1+x}$ | $= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ |
| $\ln(1-x)$ | $= -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ |
| $\cos(x)$ | $= 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$ |
| $\sin(x)$ | $= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$ |
| $(1+x)^a$ | $= 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2} + \ldots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ |