Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – Révisions 2

Fonctions, continuité, dérivabilité

1 Limites

Exercice 1.

1. Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \in [A, +\infty[, \quad 0 \leq \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \leq 1.$$

Exercice 2. Discuter suivant la valeur de $\alpha > 0$ la limite lorsque $x \to +\infty$ de

$$x^\alpha((x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}).$$

Exercice 3. Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes au voisinage de x_0 et en déduire la limite en x_0.

1. $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x_0 = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{x^3 + x - 1}{5x^4 + 2x^2}$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.
3. $h(x) = e^{x^2} - 1$ en $x_0 = 0$.
4. $i(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^3}} - 1$ en $x_0 = +\infty$.
5. $j(x) = \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x^2 + x}$ en $x_0 = 0$.
6. $l(x) = \ln(1 + x)$ en $x_0 = +\infty$.
7. $m(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ en $x_0 = +\infty$.
8. $n(x) = \dfrac{x - \ln(x)}{x+1}$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.

Exercice 4. Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $xe^{-\sqrt{\ln x}}$.

2 Continuité et dérivabilité

Exercice 5.

1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \ln(\sqrt{t^2 - 1} + t)$ définit une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
2. Pour $y \in J$, justifier qu'il existe un unique $x \geq 1$ tel que $y = f(x)$.
   Calculer et simplifier $e^y + e^{-y}$ et $e^y - e^{-y}$

3. Déterminer un sous-intervalle de J maximal sur lequel f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. Donner une formule pour $(f^{-1})'$ sur cet intervalle.

Exercice 6. Soit $t \geq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P_t(x) = x^3 + tx - 1$.

1. Montrer que P_t admet une unique racine réelle que l'on notera $u(t)$.
2. (a) Montrer que $u(t) \in]0, 1]$.
   (b) Démontrer que $u : t \mapsto u(t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$.
   Indication : calculer $P_t(u(t))$.
3. Montrer que u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0, 1]$ et que sa bijection réciproque est la fonction v définie par :
$$\forall y \in]0, 1], \quad v(y) = \frac{1 - y^3}{y}.$$
4. (a) Justifier que u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Justifier que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, une expression de $u'(t)$ en fonction de t et $u(t)$.

Exercice 7. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Étudier les fonctions f et g (parité, variations, limites).
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a :
$$f(x) \geq x.$$
3. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a :
$$g(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

3 Développements limités

Exercice 8. Déterminer un DL à l'ordre 3 en zéro dans chaque cas.

1. $\cos(x) + e^x$,
2. $\sin(x)\sqrt{1+x}$,
3. $\sqrt{1 + \sin(x)}$.

Exercice 9. Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$;
2. $\dfrac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$;
3. $\dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}$;
4. $\dfrac{\exp(x^2)\cos(2x) - 1}{\sin(x^2) - x^2}$.

Exercice 10. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x(2 - \cos(x))}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.
4. Faire l'étude locale de f en 0 : dérivabilité, tangente et position relative par rapport à sa tangente.