Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – Révisions 1

Fonctions, continuité, dérivabilité

1 Limites

Correction de l'exercice 1.

1. La tentative de calcul naïve de la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ montre qu'il y a une indétermination du type $+\infty \times 0$. Il s'agit de la lever.

   (a) Méthode 1. Par la technique des quantités conjuguées, on a, pour $x > 0$,

   $$\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

   En mettant en facteur, au numérateur et au dénominateur de cette dernière expression, on obtient, pour $x > 0$,

   $$\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

   Cette dernière expression, par les théorèmes opératoires usuels, a pour limite $\frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$.

   (b) Méthode 2. On utilise des développements limités. On a pour $x > 0$,

   $$\sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$$

   Or, lorsque $x \to +\infty$, $u = \dfrac{1}{x} \to 0$ et $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{1}{2}u + o(u)$, on a donc, pour $x > 0$,

   $$\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right) = x.\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right) = \frac{1}{2}+o(1) \to \frac{1}{2}$$

   Cette deuxième méthode est plus robuste et s'applique à un plus grand nombre de cas de figure que la première.

   On a donc montré que

   $$\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

2. En appliquant la définition de limite (à rappeler) en $\forall\epsilon, \exists A$ avec $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, on obtient l'existence de $A > 0$ tel que

   $$\forall x \in [a,+\infty[,\ 0 \le \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \le 1$$

Avec la méthode de la quantité conjuguée, on voit qu'on peut prendre $A = 0$ (non demandé, c'est du travail inutile ici) : On a, pour $x > 0$,

$$0 \leq \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \leq 1$$

et l'inégalité cherchée est évidente pour $x = 0$.

Correction de l'exercice 2. à faire

Correction de l'exercice 3.

1. Par équivalent usuel : $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

   Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$.

2. - En 0. Par équivalent usuel on a :

   $$x^3 + x - 1 \underset{x\to0}{\sim} -1 \quad \text{et} \quad 5x^4 + 2x^2 \underset{x\to0}{\sim} 2x^2.$$

   Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient alors :

   $$g(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{-1}{2x^2}.$$

   Ainsi : $\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{-1}{2x^2} = -\infty$.
   - En $+\infty$.Par équivalent usuel on a :

   $$x^3 + x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 \quad \text{et} \quad 5x^4 + 2x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} 5x^4.$$

   Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient alors :

   $$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5x}.$$

   Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5x} = 0$.

3. En posant $X = x^2$, on a : $\lim_{x\to0} X = 0$. Donc par équivalent usuel :

   $$h(x) = e^X - 1 \underset{x\to0}{\sim} X.$$

   Ainsi :

   $$h(x) \underset{x\to0}{\sim} x^2.$$

   Donc : $\lim_{x\to0} h(x) = \lim_{x\to0} x^2 = 0$.

4. En posant $X = \frac{1}{x^3}$ alors $\lim_{x\to+\infty} X = 0$. Ainsi par équivalent usuel :

   $$i(x) = \sqrt{1+X} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}X = \frac{1}{2x^3}.$$

   Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} i(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^3} = 0$.

5. En posant $X = -x^2$, on a : $\lim\limits_{x \to 0} X = 0$. Donc par équivalent usuel :

$$e^{-x^2} = e^X - 1 \underset{x \to 0}{\sim} X = -x^2.$$

De plus, par équivalent usuel : $x^2 + x \underset{x \to 0}{\sim} x$.
Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient, on obtient :

$$j(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-x^2}{x} = -x.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0} j(x) = \lim\limits_{x \to 0} -x = 0$.

6. Soit $x > 0$. En factorisant par le terme dominant au voisinage de $+\infty$ dans le logarithme on obtient :

$$l(x) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Maintenant, on factorise par le terme dominant au voisinage de $+\infty$:

$$l(x) = \ln(x)\left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Ainsi : $l(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x)$.
Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} l(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

7. Soit $x > 0$. On a :

$$m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2 + x}.$$

Par équivalent usuel en $+\infty$ on a : $x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$ donc par passage à l'inverse :

$$m(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

8. • En 0^+ : par équivalent usuel on a :

$$x + 1 \underset{x \to 0^+}{\sim} 1.$$

En factorisant le numérateur par le terme dominant en 0^+ on obtient :

$$\forall x > 0, \quad x - \ln(x) = -\ln(x)\left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right).$$

Or par croissance comparée :

$$\lim_{x\to 0^+} 1-\frac{x}{\ln(x)}=1.$$

Donc

$$x-\ln(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-\ln(x).$$

Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$n(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-\ln x.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} n(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}-\ln(x)=+\infty$.

- En $+\infty$: par équivalent usuel on a :

$$x+1\underset{x\to+\infty}{\sim}x.$$

En factorisant le numérateur par le terme dominant en $+\infty$ on obtient :

$$\forall x>0,\quad x-\ln(x)=x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{\ln(x)}{x}=1.$$

Donc

$$x-\ln(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x.$$

Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$n(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x}{x}=1.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} n(x)=1$.

Correction de l'exercice 4. a faire

2 Continuité et dérivabilité

Correction de l'exercice 5.

1. Il s'agit d'étudier la fonction $f : t\mapsto \ln(\sqrt{t^2-1}+t)$, de construire son tableau de variations sur $[1,+\infty[$, de déterminer l'intervalle image J pour pouvoir invoquer le théorème de la bijection.
   — Montrons que f est dérivable sur $]1,+\infty[$. Sur cet intervalle, $t\mapsto t^2-1$ est dérivable à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, on en déduit que $t\mapsto\sqrt{t^2-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.
   Enfin, $v : t\mapsto\sqrt{t^2-1}+t$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ à valeurs strictement positives donc par composition, f est dérivable sur cet intervalle.
   De plus, pour tout $t>1$:

$$f'(t)=\frac{v'(t)}{v(t)}=\frac{\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}+1}{\sqrt{t^2-1}+t}=\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}>0.$$

— On en déduit que f est continue, strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, elle définit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $J = [0, \lim_{+\infty} f[= [0,+\infty[$.

2. Pour $y \in J$ comme f est une bijection de $[1,+\infty[$ dans J, il existe un unique $x \geq 1$ tel que $y = f(x)$.
On a

$$\begin{aligned} e^y + e^{-y} &= \sqrt{x^2-1} + x + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)^2+1}{\sqrt{x^2-1}+x} \\ &= \frac{(x^2-1)+2x\sqrt{x^2-1}+x^2+1}{\sqrt{x^2-1}+x} \\ &= 2.x\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}+x} = 2x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^y - e^{-y} &= \sqrt{x^2-1} + x - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)^2-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \\ &= \frac{(x^2-1)+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \\ &= 2\frac{x^2+x.\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 2x \\ &= 2\sqrt{x^2-1}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} = 2\sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

3. La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$, sa dérivée donnée par

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

ne s'y annule pas et donc f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur $J' =]0,+\infty[$ avec

$$\forall y \in J',\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

On a, si $y = f(x)$, par la question précédente que $x = f^{-1}(y) = \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$ et $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \sqrt{x^2-1} = \dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$, tout ceci est cohérent..

Correction de l'exercice 6. Soit $t \geq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P_t(x) = x^3 + tx - 1$.

1. La fonction P_t est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_t'(x) = 3x^2 + t \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $x = t = 0$.
Ainsi P_t est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (en étudiant les limites en $\pm\infty$.
Par conséquent, il existe un unique réel $u(t)$ tel que $P_t(u(t)) = 0$.

2. (a) On a $P_t(0) = -1 < 0 = P_t(u(t)) \leq P_t(1) = t$.
   Par croissance stricte de P_t, on en déduit donc :
$$0 < u(t) \leq 1.$$
   (b) Soient $0 \leq t < s$ et montrons que $u(t) > u(s)$. Pour cela, on va calculer $P_t(u(s))$ et regarder son signe :
$$\begin{aligned} P_t(u(s)) = u(s)^3 + tu(s) - 1 &= u(s)^3 + su(s) - 1 + (t-s)u(s) \\ &= P_s(u(s)) + (t-s)u(s) \\ &= (t-s)u(s) \\ &< 0 = P_t(u(t)). \end{aligned}$$
   Comme P_t est strictement croissante, on a donc :
$$u(s) < u(t).$$
   (c) D'après les questions précédentes, u est décroissante et bornée donc par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
   De plus, pour tout $t \geq 0$ on a
$$0 = P_t(u(t)) = u(t)^3 + tu(t) - 1 \quad i.e \quad tu(t) = 1 - u(t)^3.$$
   Si $\ell \neq 0$, le membre de gauche ci-dessus tend vers $\pm\infty$ alors que le membre de droite tend vers $1 - \ell^3$ ce qui est absurde.
   Ainsi $\ell = 0$.
3. Soit $y \in]0,1]$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:
$$y = u(t) \iff y^3 + ty - 1 = 0 \iff t = \frac{1-y^3}{y}.$$
   Cela montre que u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0,1]$ et que sa bijection réciproque est la fonction v définie par :
$$\forall y \in]0,1], \quad v(y) = \frac{1-y^3}{y}.$$
4. (a) Il est facile de voir que v est continue et strictement décroissante. Le théorème de la bijection assure alors que sa bijection réciproque, à savoir u, est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) On sait que v est dérivable et que :
$$\forall y \in]0,1], \quad v'(y) = -\frac{2y^3+1}{y^2} < 0.$$
   Comme v' ne s'annule pas sur $]0,1]$, sa bijection réciproque u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geq 0$:
$$u'(t) = \frac{1}{v'(u(t))} = -\frac{u(t)^2}{2u(t)^3+1}.$$

Correction de l'exercice 7. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{et} \quad g(-x) = g(x).$$

Donc la fonction f est impaire et la fonction g est paire.
Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = g(x) \quad \text{et} \quad g'(x) = f(x).$$

On en déduit g étant strictement positive sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Le tableau ci-dessus permet de trouver le signe de $f = g'$; ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2. Soit $h : x \mapsto f(x) - x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1.$$

Le tableau de variation ci-dessus permet de conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) \geq 0.$$

Ainsi h est croissante et donc :

$$\forall x \geq 0, \quad h(x) \geq h(0) = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) \geq x.$$

3. Soit $u : x \mapsto g(x) - 1 - \dfrac{x^2}{2}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = g'(x) - x = f(x) - x.$$

La question précédente permet de conclure que :

$$\forall x \geq 0, \quad u'(x) \geq 0.$$

Ainsi u est croissante sur $[0, +\infty[$ et donc :

$$\forall x \geq 0, \quad u(x) \geq u(0) = 0$$

c'est-à-dire

$$g(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

3 Développements limités

Correction de l'exercice 8.

1. On sait que :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 = 3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Ainsi :

$$\cos(x) + e^x = 2 + x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

2. On sait que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sin(x)\sqrt{1+x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
&= x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)
\end{aligned}$$

3. On sait que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + \underset{x\to 0}{o}(u^3).$$

Or $\sin(x) \underset{x\to}{\longrightarrow} 0$ donc on peut composer les équivalent :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sin(x)} &= \sqrt{1 + x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} \\
&= 1 + \frac{x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{2} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^2}{8} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^3}{16} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right) x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9.

1. Au numérateur, on a une différence de deux termes équivalents en 0. Comme on ne peut pas soustraire les équivalents, on va plutôt utiliser les DL :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) - x}{x^3} &= -\frac{1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(1) \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

2. Au numérateur et au dénominateur, on a encore une différence de deux termes équivalents en 0. Comme on ne peut pas soustraire les équivalents, on va plutôt utiliser les DL ici aussi :

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} &= \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)} \\
&= \frac{-x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&= \frac{-1 + \underset{x\to 0}{o}(1)}{\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)} \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2.
\end{aligned}$$

3. On suit la même stratégie pour la même raison :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - \left(x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{x^2} &= -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1) \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4. Toujours pareil.

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(x^2)\cos(2x)-1}{\sin(x^2)-x^2} &= \frac{\Big(1+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\Big)\Big(1-\frac{(2x)^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}((2x)^2)\Big)-1}{x^2-\frac{(x^2)^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}((x^2)^3)-x^2} \\
&= \frac{\Big(1+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\Big)\Big(1-2x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\Big)-1}{-\frac{x^6}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^6)} \\
&= \frac{1-x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-1}{-\frac{x^6}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^6)} \\
&= \frac{x^2}{x^6}\times\frac{-1+\underset{x\to 0}{o}(1)}{-\frac{1}{6}+\underset{x\to 0}{o}(1)} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{6}{x^4} \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} +\infty.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x(2-\cos(x))}$.

1. Il est évident que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
2. On sait que : $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Par conséquent :
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$
On peut donc prolonger continument f en 0 en posant $f(0) = 1$.
3. On a :
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)}{x(2-1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^3))} \\
&= \frac{1-\frac{x^2}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}{1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)} \\
&= \left(1-\frac{x^2}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\
&= 1-\frac{2}{3}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^3).
\end{aligned}$$
4. Avec le DL en 0 on obtient :
$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{2}{3}x+\underset{x\to 0}{o}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$
Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
La tangente à la courbe de f en 0 est la droite d'équation $y = 1$ et comme :
$$f(x)-1 = -\frac{2}{3}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^3) \leq 0 \quad \text{au voisinage de 0}$$
alors la courbe de f est localement en-dessous de sa tangente en 0.