Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD1

Fonctions de deux variables

Exercice 1. Déterminer et représenter l'ensemble de définition des fonctions de deux variables réelles suivantes :

1. la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln(xy) + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2y + x^2$,
2. la fonction $g : (x, y) \mapsto \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Exercice 2. Représenter les lignes de niveau suivantes.

1. La ligne de niveau -1 de la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5$.
2. La ligne de niveau 0 de la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^2$.

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^2 sur un pavé ouvert à préciser et calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

1. La fonction $f_1 : (x, y) \mapsto x^3y^3 + 3x^2y - 2y^2x + x + 1$.
2. La fonction $f_2 : (x, y) \mapsto \cos(3xy - y + 1)$.
3. La fonction $f_3 : (x, y) \mapsto \arctan(x + 2y)$.
4. La fonction $f_4 : (x, y) \mapsto x(\ln(x) + x + y^2)$.
5. La fonction $f_5 : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et en déduire que l'ensemble des points critiques est :
$$\{(0, 0)\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}.$$
3. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = xe^{-x}.$$
En déduire que les points critiques de f sont des extrema globaux (on précisera lesquels sont des maxima et lesquels sont des minima).

Exercice 5. Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. (a) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2. (a) Développer $2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2$.
   (b) En déduire que f admet un minimum global en A.
3. On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :
$$g(x,y)=2e^{2x}+2e^{2y}+2e^{x+y}-e^x-e^y.$$
   (a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x,y)\geq -\frac{1}{6}$.
   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 6. Soit $f:(x,y)\mapsto x^y-x$.
1. Déterminer et représenter l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et déterminer les points critiques de f sur D.
3. Montrer : $f(1+h,1-h)=-h^2+\underset{h\to 0}{o}(h^2)$.
4. En étudiant de même $f(1+h,1+h)$, montrer que le point critique de f n'est pas un extremum.

Exercice 7. Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et α, β des nombres réels non nuls. On pose pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$:
$$g(u,v)=f(\alpha\cdot u+\beta\cdot v,\alpha\cdot u-\beta\cdot v).$$
1. Déterminer $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)$ en fonction des dérivées partielles de f et de α et β.
2. Faire de même avec $\alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)-\beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$ et résoudre l'équation d'inconnue $g\in C^2(\mathbb{R}^2)$:
$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)-\beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=0.$$

Exercice 8.
1. Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et vérifiant :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y)\neq(0,0),\ \left\{\begin{array}{rcl}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right.$$
2. Même question avec C^2.

Exercice 9 (Droite de régression linéaire)**.** Étant donné une série statistique double $(X,Y)=[(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)]$ avec $s_X^2\neq 0$, il existe un unique couple (a,b) minimisant l'erreur quadratique $\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2$.
La droite d'équation $y=ax+b$ est alors appelée **la droite de régression linéaire de Y en X** et à pour équation réduite :
$$y=\frac{s_{(X,Y)}}{s_X^2}(x-\bar{X})+\bar{Y}.$$

Cette droite est appelé **la droite de régression linéaire de Y en X**. Le but de l'exercice est de montrer ce résultat. On pose

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2 . \end{aligned}$$

1. Montrer que F est de classe C^2 et déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Montrer que $\left(\frac{s_{(X,Y)}}{s_X^2}, \overline{Y} - a\overline{X}\right)$ est l'unique point critique de F.