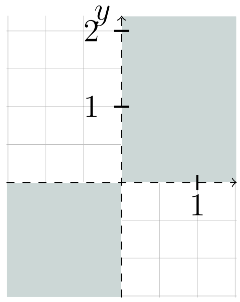
Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD1

Fonctions de deux variables

Exercice 1.

1. La fonction f est définie en (x, y) si et seulement si xy est strictement positif (pour que $\ln(xy)$ existe) c'est-à-dire si et seulement si "$x > 0$ et $y > 0$" ou "$x < 0$ et $y < 0$".



2. La fonction g est définie en (x, y) si et seulement si $9 - x^2 - y^2$ est positif c'est-à-dire si et seulement si "$x^2 + y^2 \leq 9$". L'ensemble de définition de g est donc la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 3.

Exercice 2.

1. La ligne de niveau -1 de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5$ est l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5 = -1\}.$$

Or on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5 = -1 \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 &\iff (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ &\iff \| (x, y) - (2, 0) \| = 2. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5 = -1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \| (x, y) - (2, 0) \| = 2\}.$$

La ligne de niveau -1 de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5$ est donc le cercle de centre $(2, 0)$ et de rayon 2.

2. La ligne de niveau 0 de la fonction $(x, y) \mapsto x^2y^2$ est l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y^2 = 0\}.$$

Or on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2y^2 = 0 \iff x^2 = 0 \text{ ou } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Ainsi on obtient :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y^2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}.$$

La ligne de niveau 0 de la fonction $(x, y) \mapsto x^2y^2$ est donc la réunion des droites d'équation $y = 0$ et $x = 0$.

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^2 sur un pavé ouvert à préciser et calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

1. La fonction f_1 est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (en particulier, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$). De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^3 + 6xy - 2y^2 + 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 3x^3y^2 + 3x^2 - 4yx;$$
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^3 + 6y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x,y) = 6x^3y - 4x;$$
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x,y) = 9x^2y^2 + 6x - 4y.$$

2. La fonction f_2 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de fonctions de classe C^2.
   De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = -3y\sin(3xy - y + 1) \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -(3x-1)\sin(3xy - y + 1);$$
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,y) = -9y^2\cos(3xy - y + 1) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,y) = -(3x-1)^2\cos(3xy - y + 1);$$
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(x,y) = 3(1-3x)y\cos(3xy - y + 1) - 3\sin(3xy - y + 1).$$

3. La fonction f_3 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que composée de fonctions de classe C^2.
   De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1 + (x+2y)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{1 + (x+2y)^2};$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2(x+2y)}{(1 + (x+2y)^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{8(x+2y)}{(1 + (x+2y)^2)^2};$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{4(x+2y)}{(1 + (x+2y)^2)^2}.$$

4. La fonction $(x,y) \mapsto x$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. La fonction logarithme étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par composition que $(x,y) \mapsto \ln(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   Par ailleurs, la fonction $(x,y) \mapsto x + y^2$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   Ainsi par somme puis produit de fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la fonction f_4 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   De plus pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) = \ln(x) + x + y^2 + x\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \ln(x) + 2x + y^2 + 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y) = 2yx$$
$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{x} + 2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}(x,y) = 2x$$
$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y = \frac{\partial^2 f_4}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \text{d'après le théorème de Schwarz.}$$

5. La fonction $(x,y) \mapsto x$ est polynomiale donc est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$. La fonction racine carrée étant de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, on en déduit par composition que $(x,y) \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$.

   La fonction $(x,y) \mapsto y$ est polynomiale donc est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$ et à valeurs dans $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$. La fonction logarithme étant de classe C^2 sur $]1,+\infty[$ et ne s'y annulant pas, on en déduit par composition que $(x,y) \mapsto \ln(y)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$.
   Par quotient, f_5 est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$.
   De même, elle est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,1[$.
   De plus pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[\times]1,+\infty[$ et tout $(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,1[$ on a :

$$\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}\ln(y)} \quad ; \quad \frac{\partial f_5}{\partial y}(x,y) = -\frac{\sqrt{x}}{y\ln(y)^2};$$
$$\frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}\ln(y)} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_5}{\partial y^2}(x,y) = \sqrt{x}\frac{\ln(y)+2}{y^2\ln(y)^3}$$
$$\frac{\partial^2 f_5}{\partial x\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2y\sqrt{x}\ln(y)^2} = \frac{\partial^2 f_5}{\partial y\partial x}(x,y) \quad \text{d'après le théorème de Schwarz.}$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par composition $(x,y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
   Finalement, par produit, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2);$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2).$$

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2) &=& 0 \\ 2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2) &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x(1-x^2-y^2) &=& 0 \\ y(1-x^2-y^2) &=& 0 \end{array}\right. .$$

   Ainsi, on obtient :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y(1-x^2-y^2) &=& 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} 1-x^2-y^2 &=& 0 \\ y(1-x^2-y^2) &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ 1-x^2-y^2 &=& 0 \end{array}\right. \text{ ou } 1-x^2-y^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}.$$

Ainsi l'ensemble des points critiques est :

$$\{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}.$$

3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a ;

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x};$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $g(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

En particulier on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(0) = 0 \leq g(x) \leq e^{-1} = g(1).$$

Or, on remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x^2+y^2)$. Ainsi :

- pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$f(x,y) = g(x^2+y^2) \geq g(0) = f(0,0)$$

et f possède donc un minimum global en $(0,0)$;

- soit (x_0,y_0) tel que $x_0^2+y_0^2=1$ alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$f(x,y) = g(x^2+y^2) \leq g(1) = g(x_0^2+y_0^2) = f(x_0,y_0)$$

et f possède donc un maximum global en (x_0,y_0).

Exercice 5.

1. (a) La fonction f est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x+2y-1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y+2x-1.$$

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4x+2y-1 &=& 0 \\ 4y+2x-1 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 6x-1 &=& 0 \\ 4y+2x-1 &=& 0 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{1}{6} \\ y &=& \dfrac{1}{6} \end{array}\right. .$$

Ainsi le seul point critique de f est A et $f(A) = -\dfrac{1}{6}$.

2. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2 = 2\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{16}+xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(y^2-\frac{y}{3}+\frac{1}{36}\right)$$
$$= 2x^2+2y^2+2xy-x-y+\frac{1}{6}.$$

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente on a :

$$0 \leq 2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2 = f(x,y)+\frac{1}{6}.$$

On en déduit donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq -\frac{1}{6} = m.$$

Ainsi m est le minimum global de f.

3. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a d'après 3.b :

$$g(x,y) = f(e^x, e^y) \geq -\frac{1}{6}.$$

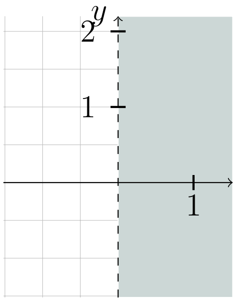
(b) En particulier :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) \geq -\frac{1}{6} = f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) = g(-\ln(6), -\ln(6)).$$

Ainsi g possède un minimum global en $(-\ln(6), -\ln(6))$ qui vaut $-\dfrac{1}{6}$.

Exercice 6. Soit $f : (x,y) \mapsto x^y - x$.

1. On remarque que $x^y = e^{y\ln(x)}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:



2. La fonction $(x,y) \mapsto x$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction logarithme est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   Par produit $(x,y) \mapsto y\ln(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ puis par composition avec l'exponentielle $(x,y) \mapsto e^{y\ln(x)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   Finalement, par somme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   Calculons ses dérivées partielles d'ordre 1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} - 1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)x^y.$$

Déterminons les points critiques : soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On a :

$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} yx^{y-1} - 1 & = & 0 \\ \ln(x)x^y & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} yx^{y-1} - 1 & = & 0 \\ \ln(x) & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x & = & 1 \end{array} \right.$$

Ainsi f possède un unique point critique : $(1,1)$.

3. Soit $h > 0$. On a

$$\begin{aligned} f(1+h, 1-h) &= e^{(1-h)\ln(1+h)} - 1 - h \\ &= e^{(1-h)(h - \frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2))} - 1 - h \\ &= e^{h - \frac{3}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2)} - 1 - h \\ &= 1 + (h - \frac{3}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2)) + \frac{1}{2}(h - \frac{3}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2))^2 - 1 - h \\ &= -h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2) \end{aligned}$$

4. De même pour $h > 0$:

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+h) &= e^{(1+h)\ln(1+h)} - 1 - h \\ &= e^{(1+h)(h - \frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2))} - 1 - h \\ &= e^{h + \frac{1}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2)} - 1 - h \\ &= 1 + (h + \frac{1}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2)) + \frac{1}{2}(h + \frac{1}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2))^2 - 1 - h \\ &= h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2) \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $h > 0$ suffisamment proche de 0 on a :

$$f(1+h, 1-h) < 0 = f(1,1).$$

En particulier, tout pavé ouvert contenant $(1,1)$ contient un élément dont l'image est strictement inférieure à $f(1,1)$: ainsi f n'admet pas de minimum local en $(1,1)$. De la même façon, pour tout $h > 0$ suffisamment proche de 0 on a :

$$f(1+h, 1+h) > 0 = f(1,1).$$

En particulier, tout pavé ouvert contenant $(1,1)$ contient un élément dont l'image est strictement supérieure à $f(1,1)$: ainsi f n'admet pas de maximum local en $(1,1)$.

Exercice 7. Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et α, β des nombres réels non nuls. On pose pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(u,v) = f(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

1. (a) Soit $v \in \mathbb{R}$. D'après la formule de dérivation des fonctions composées on sait que la fonction partielle $g_v : u \mapsto f(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est :

$$u \mapsto \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) + \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

Ainsi :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) + \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

De même, on trouve :

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \beta \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) - \beta \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

(b) On procède de même pour les dérivées partielles d'ordre 2. Si on fixe $v \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v)$ est la dérivée en u de la fonction partielle :

$$u \longmapsto \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) + \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

La formule de dérivation des composées donne alors, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) + \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) \\ &\quad + \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta . v) + \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v)\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) &= \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) - \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) \\ &\quad - \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta . v) + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v)\end{aligned}$$

2. On peux maintenant simplifier (on utilise le théorème de Schwarz sur l'égalité des dérivées secondes croisées) : pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) - \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = -4\alpha^2 \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v).$$

Résoudre l'équation d'inconnue $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \ \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) - \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = 0$$

revient donc à résoudre l'équation d'inconnue $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha u + \beta v, \alpha u - \beta v) = 0.$$

Or la transformation linéaire $(u,v)\mapsto(x,y)=(\alpha u+\beta v,\alpha u-\beta v)$ étant bijective de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même (son déterminant est $\alpha^2+\beta^2>0$), cela revient à résoudre l'équation d'inconnue $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0.$$

On peut résoudre ceci par double primitivation : comme, à y fixé, la fonction partielle de la dérivée partielle $x\mapsto \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$ est nulle, on en déduit qu'il existe $f(y)$ telle que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(y).$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, $y\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et la fonction f ainsi définie est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
En fixant x, on peut maintenant, en primitivant f en F, affirmer l'existence de $G(x)$ tel que

$$\forall y\in\mathbb{R},\ f(x,y)=F(y)+G(x)$$

Comme $x\mapsto f(x,y)$ est C^2 sur $\mathbb{R}$, G l'est aussi. On a donc résolu (analyse) :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$$

en : il existe $F,G\in C^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=F(y)+G(x).$$

On peut vérifier (synthèse) que les fonctions de ce type sont évidemment solutions de problème.
On peut maintenant revenir en les variables (u,v) :
La fonction $g\in C^2(\mathbb{R}^2)$ vérifie :

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)-\beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=0$$

si et seulement si il existe deux fonctions F et G, C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2, g(u,v)=F(\alpha u-\beta v)+G(\alpha u+\beta v).$$

Exercice 8.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y)\neq(0,0),\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

— Fixons $y \neq 0$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

et donc en primitivant (y étant entendu fixé), on obtient l'existence d'une constante $C(y)$ (c'est une constante par rapport à x mais elle dépend de y vu qu'on travaille à y fixé) telle que

$$\forall y \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C(y).$$

— À x fixé maintenant, la fonction $C : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall y \neq 0,\ C(y) = f(x,y) - \sqrt{x^2+y^2}$$

est de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et sur chacun d'entre eux,

$$C'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0.$$

On en déduit que $C(y)$ est constante sur chacun des intervalles et donc on vient de démontrer l'existence de deux constantes C_- et C_+ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C_+$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y < 0,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C_-$$

— En fixant $x \neq 0$ et en faisant tendre y vers 0^+ puis 0^-, on obtient que $C_+ = C_-$, constante que l'on a note C et que l'on a (continuité par rapport à y à x fixé) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (x,y) \neq (0,0) \Rightarrow f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C$$

Voilà qui clos notre analyse.

— Pour la synthèse, on constate que quelle que soit la constante C, la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0),\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C$$

vérifie les propriétés demandées.

2. Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant le système est en particulier une fonction $\mathcal{C}^1$ vérifiant le système.

   On vérifie alors que toute les fonctions précédemment obtenues sont de classe $\mathcal{C}^2$. Donc rien ne change vraiment...

   Plus drôle : trouver les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \neq (0,0),\ \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right.$$

   Indication : Schwarz