Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS1- 3h00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}}{x^2}.$$

1. (a) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+2x} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}$.
   (b) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On précisera la valeur du prolongement en 0.
2. Étudier la dérivabilité en 0 du prolongement.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n.
On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et l'on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.
Pour tout entier i, on pourra noter N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i-ème boule tirée s'il y a eu au moins i tirages, et 0 sinon.

1. Trouver la loi de X_2 puis donner son espérance et sa variance.
2. Trouver la loi de X_3 et donner son espérance.
3. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre X_n.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
5. Prouver que pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1).$$

6. En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n+1}$.

7. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme d'une somme.

8. **(a)** Prouver que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

(c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème

Le but de ce problème est d'étudier certains modèles d'évolution d'une population. Les parties sont indépendantes.

Partie 1–Le modèle logistique discret

Dans cette partie, on modélise la taille de la population par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où n désigne le temps écoulé depuis un instant initial $n = 0$ donné.
On suppose que la taille de la population est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq M.$$

Dans toute cette partie, on suppose $0 < u_0 < M$ et on pose, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{u_n}{M}.$$

On suppose qu'il existe un réel a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = av_n(1 - v_n).$$

Le but de cette partie est d'étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de a.

Le cas $0 < a \leq 1$.

Dans cette partie, on prend $0 < a \leq 1$.
On considère les fonctions f_a et g_a définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_a(x) = ax(1 - x) \quad \text{et} \quad g_a(x) = f_a(x) - x.$$

1. **(a)** Dresser le tableau de variations de la fonction f_a sur $[0, 1]$.

(b) Étudier le signe de g_a sur $[0, 1]$.

2. **(a)** Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$.

(b) Déduire des questions précédentes que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. **(a)** Justifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

(b) Justifier que $f_a(\ell) = \ell$.

(c) En déduire la valeur de ℓ. Qu'est-ce que cela signifie sur la population étudiée ?

Le cas $a = \dfrac{5}{2}$.

Dans cette partie, on suppose que $a = \dfrac{5}{2}$ et que $v_0 = \dfrac{1}{2}$. On note f, g et h les fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \frac{5}{2}x(1-x) \quad ; \quad g(x) = f(x) - x \quad \text{et} \quad h(x) = f \circ f(x) - x.$$

4. Calculer v_1, v_2, v_3.

5. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de v_n.

6. **(a)** Démontrer que f admet exactement deux points fixes sur $[0,1]$.

(b) Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$h(x) = -\frac{x(5x-3)(25x^2 - 35x + 14)}{8}.$$

(c) En déduire que les fonctions f et $f \circ f$ ont les mêmes points fixes sur $[0,1]$.

(d) Étudier le signe de h sur $\left[0, \dfrac{3}{5}\right]$.

7. **(a)** Montrer que : $f \circ f\left(\left[\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}\right]\right) \subset \left[\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}\right]$.

(b) Montrer que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Démontrer qu'elle converge vers $\dfrac{3}{5}$.

(d) En déduire que la suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers $\dfrac{3}{5}$.

(e) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

8. Qu'est-ce que cela signifie sur la population étudiée ?

Partie 2–Le modèle logistique continu

Dans cette partie, on modélise l'évolution de la population par une fonction. La taille de la population à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est représentée par le réel $y(t)$ où y désigne une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
On suppose que la taille de la population est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif M tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < y(t) < M.$$

On suppose que y est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) = ay(t)(M - y(t)).$$

9. **(a)** Démontrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera tels que pour tout réel $z \in]0, M[$:

$$\frac{1}{z(M-z)} = \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{M-z}.$$

En déduire que y vérifie l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\frac{y'(t)}{M-y(t)} - a = 0.$$

(b) Déterminer, en fonction de a et de M, une primitive de la fonction :

$$t \longmapsto \alpha\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\frac{y'(t)}{M-y(t)} - a \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+.$$

10. Déduire de la question précédente qu'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$y(t) = \frac{cMe^{aMt}}{1+ce^{aMt}}.$$

11. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.
Qu'est-ce que cela signifie sur la population étudiée ?

Partie 3–Le modèle proies-prédateurs discret

Dans cette partie, on souhaite modéliser l'évolution conjointe de deux populations : une population de lièvres, qui constituent des proies et une population de lynx, qui sont des prédateurs des lièvres.
La population de lièvres est modélisée par une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la population de lynx par une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On fait les hypothèses suivantes

— le taux d'accroissement des proies résulte d'un taux de natalité constant a et d'un taux de mortalité by_n proportionnel au nombre de prédateurs.

— le taux d'accroissement des prédateurs résulte d'un taux de natalité cx_n proportionnel au nombre de proies, et d'un taux de mortalité constant d

où a, b, c et d sont des réels strictement positifs.
On obtient alors les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= (1+a)x_n - by_nx_n \\ y_{n+1} &= (1-d)y_n + cx_ny_n \end{cases} \tag{1}$$

12. Expliquer les relations (1).

13. Étudier les suites (x_n) et (y_n) dans le cas où $x_0 = \dfrac{d}{c}$ et $y_0 = \dfrac{a}{b}$.

14. **Python.** On suppose que les variables a, b, c et d sont déjà définies dans Python.

(a) Écrire une fonction Python `Population` qui prend en argument x_0, y_0 et n, et qui renvoie le couple (x_n, y_n).

(b) Compléter le programme suivant pour qu'il trace la représentation graphique des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ en fonction de $n \in [\![0, 150]\!]$.

```
a,b,c,d = 0.08 ,  0.00002 ,0.000008 ,0.5
x0, y0 = 62000, 3800

X = [x0]
Y = [y0]

for k in # LIGNE A COMPLETER
         # LIGNE A COMPLETER
         # LIGNE A COMPLETER

plt.plot(X)
plt.plot(Y)
plt.show()
```

(c) Pour le tracé, on a utilisé le module `matplotlib.pyplot` sous l'alias `plt`. Comment importer ce module ?

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = x_n - \dfrac{d}{c}$ et $v_n = y_n - \dfrac{a}{b}$.

15. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - \dfrac{bd}{c} v_n - b u_n v_n \\ \\ v_{n+1} &= v_n + \dfrac{ac}{b} u_n + c u_n v_n \end{cases}$$

Ce système est difficile à résoudre. **On va donc admettre pour toute la suite** qu'on peut négliger les termes $u_n v_n$ et que les suites satisfont :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - \dfrac{bd}{c} v_n \\ \\ v_{n+1} &= v_n + \dfrac{ac}{b} u_n \end{cases}.$$

On supposera également que $\dfrac{bd}{c} = \dfrac{ac}{b}$ et on notera α cette valeur.

On pose alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

16. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et A.

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

17. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

(b) Montrer que $A = P \begin{pmatrix} 1 + i\alpha & 0 \\ 0 & 1 - i\alpha \end{pmatrix} P^{-1}$.

(c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n et de α.

18. Déduire des questions précédentes qu'il existe $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_n & = & r^n(\cos(n\theta)u_0 - \sin(n\theta)v_0) \\ v_n & = & r^n(\cos(n\theta)v_0 + \sin(n\theta)u_0) \end{array} \right.$$